www.sapientia.uji.es | 28



Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Parte I: Álgebra Lineal

Miguel Barreda Rochera
José Antonio López Ortí

Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Parte I: Álgebra Lineal

Miguel Barreda Rochera
José Antonio López Ortí



Departament de Matemàtiques

■ Codi assignatura 503

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
http://www.tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

Col·lecció Sapientia, 28
Primera edició, 2010
www.sapientia.uji.es

ISBN: 978-84-692-9833-6



Índice General

Prólogo

La asignatura *Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería* de la titulación de Ingeniería Técnica en Diseño Industrial consta de 4.5 créditos teóricos, 1.5 créditos de prácticos y 1.5 créditos de laboratorio. Tiene carácter troncal, anual y se imparte en primer curso.

La asignatura está dividida en tres partes bien diferenciadas: Álgebra Lineal, que se imparte durante el primer semestre y objeto del presente material, Cálculo Diferencial e Integral, que se imparte durante el segundo semestre, y las prácticas de laboratorio que se imparten en varios grupos, unos en el primer semestre y otros en el segundo semestre.

Los estudiantes pueden acceder a la Titulación de Ingeniería Técnica en Diseño Industrial desde cualquiera de las siguientes opciones:

- COU. Opción A y C.
- Bachillerato LOGSE. Opción científico-técnica, artes y ciencias sociales.
- Acceso mayores de 25 años. Opción científico-técnica, artes y ciencias sociales.
- FP II. Diferentes opciones.
- Ciclos formativos de grado superior. Diferentes opciones.
- Módulos profesionales de nivel III. Diferentes opciones.

aunque la vía de acceso predominante es el bachillerato LOGSE.

El material que aquí presentamos cubre los aspectos teóricos/prácticos de la primera parte de la asignatura (Álgebra Lineal), sin pretender ser un manual exhaustivo de los contenidos de la misma, ya que los créditos teóricos se imparten una vez por semana, durante el primer semestre, en sesiones de una hora y media, y los créditos prácticos se imparten una vez cada dos semanas, durante el primer semestre, en sesiones de una hora.

Este manual está dividido en cuatro temas y cubre los aspectos fundamentales del álgebra lineal. En los dos primeros temas se hace un repaso de aspectos ya estudiados en el bachillerato científico-técnico, como son los sistemas de ecuaciones lineales, estudiándolos desde el punto matricial, y la geometría del espacio tridimensional, ya que la vía de acceso del bachillerato LOGSE no garantiza que los

estudiantes hayan estudiado matemáticas en el bachillerato. Si bien, desde un punto de vista matemático, los dos primeros temas se deberían estudiar después del tercero (espacios vectoriales), hemos creído conveniente seguir el mismo esquema del bachillerato debido al poco tiempo disponible para impartir la asignatura. En el tercer tema estudiamos los espacios vectoriales reales, centrándonos en los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$. El cuarto tema lo dedicamos a la diagonalización de matrices reales.

En cada uno de los temas, además de exponer el contenido teórico, se muestran ejemplos sencillos que ayudan al estudiante a comprender los aspectos teóricos, y ejercicios para profundizar en los mismos.

Notación

La notación que emplearemos en este material es la estándar en matemáticas. Designaremos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

por $\mathbb{Z}$ al conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

por $\mathbb{Q}$ al conjunto de los números racionales

$$\mathbb{Q} = \{m/n : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales y por $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos.

El resto de la notación empleada se irá introduciendo en cada uno de los temas.

Parte I: Álgebra Lineal

Tema 1

Sistemas de ecuaciones lineales

1.1. Introducción

En este tema se aborda el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes reales. El ejemplo más sencillo es el de una ecuación lineal con una incógnita (ecuación de primer grado):

$$a \cdot x = b \tag{1.1}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, son conocidos. Evidentemente, la única solución de la ecuación (1.1) es

$$x = \frac{b}{a}$$

El estudio matricial de los sistemas de ecuaciones lineales permite escribir formalmente estos sistemas como en la ecuación (1.1). Además, y más importante, permite estudiar su compatibilidad mediante el teorema de Rouché-Fröbenius y resolverlos mediante la regla de Cramer.

1.2. Matrices

Como se ha indicado en la introducción nos vamos a limitar a las matrices con coeficientes reales. En esta sección vamos a introducir las definiciones más usuales sobre matrices y las operaciones que se pueden realizar con ellas.

1.2.1. Definiciones

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, se llama **matriz** real de tamaño $m \times n$ a una colección de $m \cdot n$ números reales, que representamos en una tabla rectangular de m filas y n columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Los números reales a_{ij} se llaman **elementos** de la matriz A. Las matrices las denotaremos con las letras mayúsculas: A, B, C, ..., y sus elementos con la misma letra en minúsculas y subíndices indicando la fila y la columna que ocupan en la matriz.

Se llama **línea** de una matriz a una fila o a una columna de la misma.

El conjunto de todas las matrices reales de tamaño $m \times n$ lo representamos por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.2.1
La siguiente matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 7 & 5 & 9 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

El elemento que ocupa la tercera fila y la segunda columna de la matriz A es: $a_{32} = 5$.

La **matriz nula** es aquella matriz que tiene todos sus elementos iguales a cero, y se representa por O.

Ejemplo 1.2.2
La siguiente es la matriz nula de tamaño 4×3:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $m = 1$, decimos que la matriz A es una **matriz fila**, en cuyo caso adquiere la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.2.3
La siguiente matriz A es una matriz fila:

$$A = (-1, 2, 0, 0)$$

En la matriz A se han separado sus elementos con comas para que no haya confusión.

Si $n = 1$, decimos que la matriz A es una **matriz columna**, en cuyo caso adquiere la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.2.4
La siguiente matriz A es una matriz columna:

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Si $m = n$, decimos que la matriz A es una **matriz cuadrada**, en cuyo caso adquiere la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En este caso decimos que A es una matriz de tamaño n.

El conjunto de las matrices reales de tamaño n lo representamos por $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.2.5
La siguiente matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

En una matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

decimos que los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ forman la **diagonal principal** de A.

Ejemplo 1.2.6
Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ -6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

los elementos 5, 4 y -1 forman la diagonal principal de A.

Una **matriz diagonal** es toda matriz cuadrada cuyos elementos no situados en la diagonal principal son todos iguales a cero. Si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz diagonal, entonces, en ocasiones, la representaremos así:

$$D = \text{diag}\,[d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}]$$

Ejemplo 1.2.7
La matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}[1, 2, 0]$$

es una matriz diagonal de tamaño 3.

La **matriz identidad** I es una matriz diagonal cuya diagonal principal está formada por unos

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.2.8
La matriz

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}[1, 1, 1]$$

es la matriz identidad de tamaño 3.

Ejercicio 1.2.1
Obtén las siguientes matrices de $\mathcal{M}_{4x3}(\mathbb{R})$:

$$(a) \;\; a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$(b) \;\; a_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{si } i \neq j \\ i - j & \text{si } i = j \end{cases}$$

Dada una matriz de tamaño $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

consideramos ciertos índices de filas: $i_1, i_2, \ldots, i_p$, siendo

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant m \,, \quad 1 \leqslant p \leqslant m$$

y ciertos índices de columnas: $j_1, j_2, \ldots, j_q$, con

$$1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_q \leqslant n \;, \quad 1 \leqslant q \leqslant n$$

La matriz de tamaño $p \times q$ obtenida a partir de A suprimiendo las filas y las columnas distintas a las consideradas, se llama **submatriz** de tamaño $p \times q$ de la matriz A.

Ejemplo 1.2.9
Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & -5 & 0 \\ 6 & 9 & 1 & -2 \\ -4 & 8 & 4 & -7 \\ 5 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$$

Considerando la segunda y cuarta filas, y la primera, segunda y cuarta columnas, obtenemos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ -4 & 8 & -7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

que es una submatriz de A.

Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se llama **matriz traspuesta** de la matriz A a una matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ cuyos elementos b_{ji} son:

$$b_{ji} = a_{ij} \;, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

La matriz traspuesta de A la representamos por A^t.

Ejemplo 1.2.10
La matriz traspuesta de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

es

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Diremos que una matriz cuadrada A es una **matriz simétrica**, si $A^t = A$.

Ejemplo 1.2.11
La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica.

1.2.2. Operaciones con matrices

Suma de matrices
Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se llama suma de A y B a una matriz $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ , \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

La matriz suma de A y B la representamos por $A + B$.

Ejemplo 1.2.12
Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ -5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Producto de un número real y una matriz
Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ y dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se llama producto de α y A a una matriz $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, tal que

$$b_{ij} = \alpha\, a_{ij} \ , \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

La matriz producto de α y A la representamos por $\alpha \cdot A$.

Ejemplo 1.2.13
Dados $\alpha = 2$ y

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & 10 & -12 \end{pmatrix}$$

Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se define la matriz $A - B$ como:

$$A - B = A + (-1)\cdot B$$

Ejercicio 1.2.2
Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(*a*) Calcula $2A - 3B$.

(*b*) Encuentra una matriz C tal que $A + 2B - C = 0$.

Ejercicio 1.2.3
Calcula x, y, z y w si se verifica que:

$$3\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 6 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices
Dadas $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$, se llama matriz producto de A y B a una matriz $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}\ , \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}$$

La matriz producto de A y B la representamos por $A \cdot B$.

Ejemplo 1.2.14
Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})\ , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

se tiene que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 2 & -9 \\ 10 & -17 \\ 11 & -13 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Llamando $C = A \cdot B$, el elemento $c_{32} = -17$ se obtiene multiplicando elemento a elemento, los elementos de la tercera fila de la matriz A por los elementos de la segunda columna de la matriz B y luego, sumando:

$$c_{32} = 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = -4 - 4 - 9 = -17$$

1.3. Determinantes

En esta sección no vamos a dar la definición de determinante de una matriz cuadrada, sino que nos conformamos con saber que a cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se le puede asociar un número real llamado determinante de A y que representamos por $|A|$.

1.3.1. Cálculo de determinantes

El determinante de una matriz de tamaño 1, $A = (a)$, es

$$|A| = a$$

es decir, es igual al único elemento que tiene la matriz A.

Determinantes de matrices de tamaño 2
Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo 1.3.1
Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

se tiene que $|A| = 11$.

Determinantes de matrices de tamaño 3. Regla de Sarrus
Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Ejemplo 1.3.2
Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

se tiene que $|A| = 45$.

Determinantes de matrices de tamaño superior a 3

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, llamamos **menor complementario** del elemento a_{ij}, con $1 \leqslant i, j \leqslant n$, al determinante de la submatriz de A que se obtiene al quitar, en la matriz A, la fila i y la columna j.

Ejemplo 1.3.3

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -6 \\ 7 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

el menor complementario del elemento $a_{41} = 1$ es 30. El menor complementario del elemento $a_{43} = 3$ es 60.

Llamamos **adjunto** del elemento a_{ij}, al resultado de multiplicar $(-1)^{i+j}$ y el menor complementario de a_{ij}.

El adjunto del elemento a_{ij} lo representamos por A_{ij}.

Ejemplo 1.3.4

Dada la matriz A del Ejemplo 1.3.3, el adjunto del elemento $a_{41} = 1$ es

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \cdot 30 = -30$$

El adjunto del elemento $a_{43} = 3$ es

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot 60 = -60$$

Eligiendo una fila de la matriz A, por ejemplo la fila i, se tiene

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

El determinante de una matriz es independiente de la fila elegida para calcularlo.

Igualmente, eligiendo una columna de la matriz A, por ejemplo la columna j, se tiene

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

El determinante de una matriz es independiente de la columna elegida para calcularlo.

Ejemplo 1.3.5

Dada la matriz A del Ejemplo 1.3.3, se tiene que

$$|A| = a_{41}A_{41} + a_{43}A_{43} = 1 \cdot (-30) + 3 \cdot (-60) = -210.$$

1.3.2. Propiedades de los determinantes

El determinante de una matriz cuadrada tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces
$$|A^t| = |A|$$

Ejemplo 1.3.6
Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
se tiene que $|A| = 5 = |A^t|$.

2. Si en una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se permutan entre sí dos líneas, se obtiene una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que
$$|B| = -|A|$$

Ejemplo 1.3.7
Dada la matriz A del Ejemplo 1.3.6, consideramos la matriz
$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
que se obtiene permutando las dos filas de la matriz A. Entonces, se tiene que
$$|B| = -5 = -|A|$$

3. Si en una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una de sus líneas se expresa como suma de dos nuevas líneas, entonces su determinante es igual a la suma de los dos determinantes de las matrices B y C, que se obtienen al sustituir, en la matriz dada, dicha línea por cada una de las líneas sumandos.

Ejemplo 1.3.8
Dadas las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & -1 \\ 1+3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
se tiene que
$$|A| = 14 = 7 + 7 = |B| + |C|$$
Notar que la primera columna de la matriz A es la suma de la primera columna de la matriz B y de la primera columna de la matriz C.

4. Si en una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se multiplica una de sus líneas por $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces el determinante de la matriz B así obtenida es

$$|B| = \alpha\,|A|$$

Ejemplo 1.3.9
Sea $\alpha = 2$ y sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 1 & -1 \\ \alpha \cdot 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$|B| = 10 = 2 \cdot 5 = 2|A| = \alpha\,|A|$$

5. Si en una matriz cuadrada una línea es combinación lineal de otras líneas, entonces su determinantes es cero. Como consecuencia, si una matriz cuadrada tiene todos los elementos de una línea nulos o tiene dos líneas iguales, entonces su determinantes es cero.

Ejemplo 1.3.10
Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

se tiene que $|A| = 0$.
Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se tiene que $|B| = 0$.
Dada la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -9 & 8 \end{pmatrix}$$

se tiene que $|C| = 0$.
Notar que la tercera fila de la matriz C es la suma de la primera fila multiplicada por 3 y de la segunda fila multiplicada por -2. Se dice, entonces, que la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras filas. El concepto de combinación lineal se formalizará al estudiar los espacios vectoriales en el Tema 3.

6. Si a una línea de una matriz cuadrada se le suma una combinación lineal de otras líneas, entonces el determinante de la matriz así obtenida es igual al determinante de la matriz de partida.

Ejemplo 1.3.11
Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -10 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & -10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 25 \end{vmatrix} = -25$$

El último determinante se obtiene fácilmente aplicando la regla de Sarrus.

1.4. Matriz inversa. Rango de una matriz

El concepto de inversa de una matriz es similar, en cierto sentido, al de inverso de un número real, aunque, como veremos, no todas las matrices tienen inversa. La noción de inversa de una matriz la utilizaremos en el Tema 4 cuando introduzcamos el concepto de matriz diagonalizable. Además, es una herramienta útil a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones matriciales.

El rango de una matriz veremos que es una pieza fundamental a la hora de determinar la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales (Teorema de Rouché-Fröbenius) y en problemas sobre variedades lineales afines (rectas y planos) que estudiaremos en el Tema 2.

1.4.1. Matriz inversa

Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una **matriz regular** si existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que

$$A \cdot B = I = B \cdot A$$

La matriz B es única y se llama **matriz inversa** de A; se representa por A^{-1}. Se puede demostrar que $(A^{-1})^{-1} = A$.

Teorema 1.4.1 (Matriz regular)
Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es regular si, y sólo si, $|A| \neq 0$.

Ejemplo 1.4.1
La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz regular porque $|A| = 1 \neq 0$. Además,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ya que $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$.

Dada una matriz regular $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se tiene que

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)^t$$

donde

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.4.1
Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4.2. Rango de una matriz

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, llamamos **menor de orden p** de la matriz A, siendo $1 \leqslant p \leqslant \text{mín}(m, n)$, al determinante de una submatriz de tamaño p de la matriz A.

Ejemplo 1.4.2
Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Cada uno de los elementos de la matriz es un menor de orden 1.
Eligiendo, por ejemplo, las filas 2ª y 3ª, y las columnas 1ª y 2ª, tenemos el menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

Eligiendo ahora, por ejemplo, las filas 1ª, 2ª y 4ª, y las 3 columnas, tenemos el menor de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A \neq O$, llamamos **rango** de la matriz A, y lo denotamos por $\operatorname{rang}(A)$, al mayor de los órdenes de los menores no nulos. Por tanto

$$1 \leqslant \operatorname{rang}(A) \leqslant \min(m, n)$$

Se conviene en decir que el rango de la matriz nula es cero:

$$\operatorname{rang}(O) = 0$$

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y un menor de orden p de A, se llama **orlar** el menor de orden p de la matriz A a obtener un menor de orden $p+1$ de A añadiendo una nueva fila y una nueva columna al menor de orden p de la matriz A.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A \neq O$, el cálculo de su rango se puede simplificar teniendo en cuenta las siguientes propiedades:

1. Si todos los menores de orden p de una matriz son nulos, entonces también lo son los de orden $p + 1$.

2. Como la matriz A es no nula, deberá tener un elemento (menor de orden 1) distinto de cero. Se consideran, entonces, los menores de orden 2 orlados a partir de este menor de orden 1 distinto de cero; si todos estos menores de orden 2 son iguales a cero, entonces también lo son el resto de menores de orden 2 y, por tanto, $\operatorname{rang}(A) = 1$.

   Si hay algún menor de orden 2 distinto de cero, entonces se consideran los menores de orden 3 orlados a partir del menor de orden 2 distinto de cero; si todos estos menores de orden 3 son iguales a cero, entonces también lo son el resto de menores de orden 3 y, por tanto, $\operatorname{rang}(A) = 2$.

   Si hay algún menor de orden 3 distinto de cero, entonces se consideran los menores de orden 4 orlados a partir del menor de orden 3 distinto de cero ...

Ejemplo 1.4.3
El rango de la matriz del Ejemplo 1.4.2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

es igual a 2, ya que tiene un menor de orden 2 distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

y los menores de orden 3 orlados a partir de este menor de orden 2 son nulos:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \,, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Se dice que dos **matrices** $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ son **equivalentes** si

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$$

Se denota escribiendo $A \sim B$.

Operaciones elementales
En una matriz se consideran las siguientes operaciones

- Permutar dos líneas.
- Sustituir una línea por ella misma multiplicada por un número distinto de cero.
- Sustituir una línea por ella misma más una combinación lineal de otras líneas.

Estas operaciones se llaman **operaciones elementales**.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, si realizamos operaciones elementales sobre sus líneas, entonces obtenemos otra matriz $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A \sim B$.

Una matriz se dice que es una **matriz escalonada** si el primer elemento no nulo en cada fila está más a la *derecha* que el de la fila anterior. Se puede comprobar que el rango de una matriz escalonada coincide con el número de filas no nulas.

Ejemplo 1.4.4
La matriz A del Ejemplo 1.4.2 tiene rango 2 porque la matriz B así obtenida

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 11 & 12 \\ 0 & 11 & 12 \\ 0 & 11 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

es una matriz escalonada con dos filas no nulas, equivalente a la matriz A. Es decir

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B) = 2$$

El proceso seguido en este último ejemplo para obtener la matriz escalonada B a partir de la matriz A, realizando operaciones elementales sobre las filas de A, se llama escalonar la matriz A.

Ejercicio 1.4.2
Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, llamamos **menor principal de orden p** de la matriz A a todo menor de orden p de la matriz A, cuya diagonal principal esté contenida en la diagonal principal de A.

Ejemplo 1.4.5
Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 7 & 9 & -5 \\ 6 & -3 & 8 & 0 \\ -5 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

se tienen los siguientes menores principales:

- Menores principales de orden 1: 1, 7, 8, 5
- Menores principales de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$$

- Menores principales de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & 9 \\ 6 & -3 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 7 & -5 \\ -5 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 8 & 0 \\ -5 & -6 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 & 9 & -5 \\ -3 & 8 & 0 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix}$$

- Menores principales de orden 4: $|A|$

Llamamos **menor principal conducente de orden p** de la matriz A, al menor principal de A que se obtiene eligiendo las p primeras filas y las p primeras columnas de A.

Ejemplo 1.4.6
Los menores principales conducentes de la matriz del Ejemplo 1.4.5 son

$$A_1 = 1 \,, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \,, \quad A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & 9 \\ 6 & -3 & 8 \end{vmatrix} \,, \quad A_4 = |A|$$

1.5. Sistemas de ecuaciones lineales

En esta sección vamos a estudiar los sistemas de ecuaciones lineales desde un punto de vista matricial. De esta forma se tiene una herramienta mucho más eficiente a la hora de obtener la solución (soluciones) de un sistema de ecuaciones lineales que con los métodos estudiados en el Bachillerato: igualación, sustitución y reducción.

Los sistemas de ecuaciones lineales son una herramienta imprescindible a la hora de abordar el estudio de los tres siguientes temas: geometría del espacio tridimensional, espacios vectoriales y diagonalización de matrices.

1.5.1. Definiciones

Un **sistema de** m **ecuaciones lineales** con n incógnitas es un conjunto de expresiones de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{1.2}$$

donde

$$a_{ij} \in \mathbb{R} \,, \quad i = 1, 2, \ldots, m \,,\; j = 1, 2, \ldots, n$$

$$b_i \in \mathbb{R} \,, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

son valores conocidos, y

$$x_j \,, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

son las incógnitas del sistema.

Ejemplo 1.5.1
Sistema de 2 ecuaciones lineales y 3 incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & - & 3y & + & z & = & 5 \\ -5x & + & 7y & + & 6z & = & 23 \end{array} \right.$$

Una **solución** del sistema lineal (1.2), es un vector[1] $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1^* & + & a_{12}x_2^* & + & \cdots & + & a_{1n}x_n^* & = & b_1 \\ a_{21}x_1^* & + & a_{22}x_2^* & + & \cdots & + & a_{2n}x_n^* & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1^* & + & a_{m2}x_2^* & + & \cdots & + & a_{mn}x_n^* & = & b_m \end{array}$$

Ejemplo 1.5.2
El vector $(-4, -3, 4)$ es una solución del sistema del Ejemplo 1.5.1, ya que

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2 \cdot (-4) & - & 3 \cdot (-3) & + & 1 \cdot 4 & = & 5 \\ -5 \cdot (-4) & + & 7 \cdot (-3) & + & 6 \cdot 4 & = & 23 \end{array}$$

Ejercicio 1.5.1
Demuestra que, para cada $z \in \mathbb{R}$, el vector $(-104 + 25z, -71 + 17z, z)$ es una solución del sistema del Ejemplo 1.5.1.

Dos **sistemas de ecuaciones lineales** son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

El sistema (1.2) se puede escribir en forma matricial como

$$A \cdot X = B \tag{1.3}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

es la **matriz de coeficientes** del sistema, y

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

son, respectivamente, la **matriz incógnita** y la **matriz de los términos independientes**.

Véase aquí la analogía señalada en la introducción de este tema entre las ecuaciones (1.3) y (1.1).

[1] El concepto de vector y el de espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ lo estudiaremos en el siguiente tema.

La matriz

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

es la **matriz ampliada** del sistema. No confundir la matriz ampliada AB con el producto de la matrices A y B, $A \cdot B$, el cual sólo tendría sentido si $m = n$.

Ejemplo 1.5.3
Dado el sistema de ecuaciones lineales del Ejemplo 1.5.1, se tiene que la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema son, respectivamente

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -5 & 7 & 6 & 23 \end{pmatrix}$$

La matriz de los términos independientes y la matriz incógnita son, respectivamente

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 23 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Si realizamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada del sistema (1.3), AB, entonces obtenemos otra matriz

$$A'B' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix}$$

tal que, el sistema

$$A' \cdot X = B' \tag{1.4}$$

siendo

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad B' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix}$$

las matrices de coeficientes y ampliada, respectivamente, del sistema (1.4), es equivalente al sistema (1.3).

Ejercicio 1.5.2
Comprueba que el sistema de ecuaciones lineales dado en el Ejemplo 1.5.1 y el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 5 \\ & & y & - & 17z & = & -71 \end{array} \right.$$

son equivalentes.

1.5.2. Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema es **incompatible** si no tiene solución; un sistema es **compatible determinado** si sólo tiene una solución; un sistema es **compatible indeterminado** si tiene más de una solución (infinitas).

Un sistema es **homogéneo** si $B = 0$, y es **inhomogéneo** si $B \neq 0$.

Un sistema homogéneo siempre tiene como solución

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$$

que se llama **solución trivial**.

Ejemplo 1.5.4
El sistema de ecuaciones lineales dado en el Ejemplo 1.5.1 es compatible indeterminado, ya que tiene infinitas soluciones:

$$(-104 + 25z, -71 + 17z, z)\,, \quad z \in \mathbb{R}$$

y es inhomogéneo.

Teorema 1.5.1 (de Rouché-Fröbenius)
Dado el sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas

$$A \cdot X = B$$

se tiene:

1. $B \neq 0$

   a) Si $\text{rang}(A) < \text{rang}(AB)$, entonces el sistema es incompatible.

   b) Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(AB) < n$, entonces el sistema es compatible indeterminado.

   c) Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(AB) = n$, entonces el sistema es compatible determinado.

2. $B = 0$

   a) Si $\text{rang}(A) < n$, entonces el sistema es compatible indeterminado.

   b) Si $\text{rang}(A) = n$, entonces el sistema sólo tiene la solución trivial.

Ejemplo 1.5.5
El sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 4 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 6 \\ 2x & & & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

es compatible determinado porque

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 28 \end{pmatrix}$$

y así

$$\text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(AB) = \text{número de incógnitas}$$

Notar que en el proceso de escalonar la matriz AB también se obtiene que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.5.6
El sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & 4z & = & 5 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ -4x & + & 8y & + & 3z & = & 5 \end{array} \right.$$

es compatible indeterminado porque

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 20 & 25 & 35 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y así

$$\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(AB) < 3 = \text{número de incógnitas}$$

Ejemplo 1.5.7
El sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -1 \\ 2x & - & y & = & 7 \\ x & + & 2y & = & 4 \end{array} \right.$$

es incompatible porque

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix}$$

y así

$$\text{rang}(A) = 2 < 3 = \text{rang}(ABB)$$

Definición 1.5.1 (Sistema de Cramer)
Un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas

$$A \cdot X = B$$

es un **sistema de Cramer**, si

1. Tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas ($m = n$).

2. La matriz de coeficientes del sistema, A, es regular, es decir $|A| \neq 0$.

Por tanto, todo sistema de Cramer es compatible determinado.

Ejemplo 1.5.8
El sistema de ecuaciones lineales dado en el Ejemplo 1.5.5 es un sistema de Cramer, ya que tiene 3 ecuaciones, 3 incógnitas y $\operatorname{rang}(A) = 3$.

Teorema 1.5.2 (Fórmula de Cramer)
La solución del sistema de Cramer $A \cdot X = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

es

$$x_i = \frac{|M_i|}{|A|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

siendo

$$M_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.5.9
La solución del sistema de Cramer del Ejemplo 1.5.5 es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{14}{-1} = -14$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-1} = 10$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-28}{-1} = 28$$

Cuando un sistema es compatible indeterminado, se consideran las ecuaciones que forman parte del menor de mayor orden no nulo de la matriz de coeficientes y se toman como incógnitas las correspondientes a las columnas de dicho menor no nulo, mientras que las demás incógnitas se consideran como parámetros. Este nuevo sistema en el que aparecen parámetros es, entonces, de Cramer, tal como se muestra en el siguiente

Ejemplo 1.5.10
El sistema de ecuaciones lineales del Ejemplo 1.5.6

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & 4z & = & 5 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ -4x & + & 8y & + & 3z & = & 5 \end{array} \right.$$

hemos visto que es compatible indeterminado, ya que

$$\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(AB) < 3 = \text{número de incógnitas}$$

Como

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

es un menor de orden 2 distinto de cero, ese sistema se puede transformar en el sistema de Cramer

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x & - & y & = & 5 - 4z \\ 2x & - & 2y & = & 1 - z \end{array} \right.$$

de 2 ecuaciones, 2 incógnitas (x e y) y 1 parámetro (z).
La solución del sistema, que depende del parámetro z, es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 - 4z & -1 \\ 1 - z & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-9 + 7z}{-4} = \frac{9}{4} - \frac{7}{4}z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5-4z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-7+5z}{-4} = \frac{7}{4} - \frac{5}{4}z$$

Por tanto, las infinitas soluciones del sistema original son de la forma

$$(9/4 - 7/4z, 7/4 - 5/4z, z)\ , \quad z \in \mathbb{R}$$

o equivalentemente

$$(4 - 7\lambda, 3 - 5\lambda, -1 + 4\lambda)\ , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.5.11
Discute, en función del parámetro real a, la compatibilidad del sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & & a\,y & - & z & = & a \\ a\,x & & & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & z & = & 5 \end{array} \right.$$

Resuélvelo cuando sea posible.
Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\ , \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & a & -1 & a \\ a & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2a - 3a - a^2 = -a - a^2 = -a(a+1)$$

Por tanto

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow a(a+1) = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \quad \text{ó} \quad a = -1$$

Esto da lugar a los tres siguientes casos:

$\boxed{1}$ $a \neq -1, 0$

En este caso, $|A| \neq 0$. De aquí

$$\text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(AB)$$

y como el número de incógnitas también es igual a 3, obtenemos que el sistema es compatible determinado.

Resolviendo el sistema por el método de Cramer, se tiene

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & a & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{10a - 6a}{-a(a+1)} = \frac{4a}{-a(a+1)} = -\frac{4}{a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2a - 5a - a^2}{-a(a+1)} = \frac{-3a - a^2}{-a(a+1)} = \frac{-a(a+3)}{-a(a+1)} = \frac{a+3}{a+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3a^2 - 5a^2}{-a(a+1)} = \frac{-2a^2}{-a(a+1)} = \frac{2a}{a+1}$$

$\boxed{2}$ $a = -1$.

Escalonamos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De aquí

$$\operatorname{rang}(A) = 2 < 3 = \operatorname{rang}(AB)$$

Por tanto, el sistema es incompatible.

$\boxed{3}$ $a = 0$.

Escalonamos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De aquí

$$\operatorname{rang}(A) = 2 = \operatorname{rang}(AB)$$

y como el número de incógnitas es igual a 3, obtenemos que el sistema es compatible indeterminado.

Por último, resolvemos el sistema compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Sustituyendo la segunda ecuación, $z = 0$, en la primera ecuación de este sistema, obtenemos:

$$x = 5 - 3y$$

es decir, las infinitas soluciones del sistema son los vectores $(5 - 3y, y, 0)$, donde $y \in \mathbb{R}$. Dicho de otra forma, las soluciones del sistema son los elementos del conjunto

$$\{(5 - 3y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$$

Tal y como veremos en el siguiente tema, los elementos de este conjunto forman una recta en el espacio tridimensional.

Ejercicio 1.5.3

Discute, en función de los parámetros reales, la compatibilidad de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Resuélvelos cuando sea posible.

$$(a)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & 3y & + & a\,z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & b \end{array}\right.$$

$$(b)\ \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ a\,x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & a \end{array}\right.$$

$$(c)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a\,x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & a\,y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & b\,z & = & 2 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$(d)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} (a+1)\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (a+1)\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (a+1)\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(e)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & a\,z & = & 6 \\ x & + & (a-1)\,y & - & z & = & -2 \\ 2x & & & - & a\,z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$(f)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & a\,y & - & z & = & -4 \\ a\,x & & & + & z & = & 8 \\ -x & + & 2y & - & a\,z & = & -a-10 \end{array}\right.$$

$$(g)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 10 \\ x & & & - & z & + & t & = & 2 \\ & & y & + & z & & & = & a \\ 2x & + & y & & & + & 2t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(h)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2a\,x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & & & - & 2a\,z & = & -1 \\ & - & a\,y & + & 5z & = & 2 \\ 3a\,x & - & y & - & z & = & -a \end{array}\right.$$

$$(i)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & + & a\,z & = & 1 \\ -x & & & + & z & = & a \\ x & + & 2a\,y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right.$$

Tema 2

Geometría del plano y del espacio

2.1. Introducción

En este tema estudiamos la geometría del plano y del espacio, centrándonos en el espacio tridimensional.

Empezamos introduciendo los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, dotándolos de estructura euclídea, y a continuación presentamos el espacio afín tridimensional con los problemas de incidencia y paralelismo entre rectas y planos.

A lo largo de este tema aparecerán conceptos que introduciremos con más detalle en el siguiente tema. Creemos conveniente hacerlo de esta forma con el fin de que el estudiante vaya asimilando paulatinamente el contenido de esta primera parte de la asignatura; por esta razón la exposición irá de lo particular a lo general.

2.2. Los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Consideramos el cuerpo de los números reales, $\mathbb{R}$, a cuyos elementos llamaremos escalares. El concepto de cuerpo lo introduciremos en el tema 3.

2.2.1. El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$

En el conjunto $\mathbb{R}^2$, formado por todos los pares ordenados de números reales,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

se pueden definir dos operaciones: suma y producto por un escalar.

Suma

Dados $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Con esta operación el conjunto $\mathbb{R}^2$ tiene estructura de grupo conmutativo. Esta estructura algebraica la introduciremos en el tema 3.

Ejemplo 2.2.1
Sean $(2,-1),(-3,4) \in \mathbb{R}^2$. Entonces

$$(2,-1)+(-3,4)=(-1,3)$$

Producto por un escalar
Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\lambda \cdot (v_1, v_2) = (\lambda\, v_1, \lambda\, v_2)$$

Ejemplo 2.2.2
Sean $2 \in \mathbb{R}$ y $(-1,4) \in \mathbb{R}^2$. Entonces

$$2 \cdot (-1,4) = (-2,8)$$

El producto por un escalar cumple las siguientes propiedades:

- $\lambda \cdot \big((u_1,u_2)+(v_1,v_2)\big) = \lambda \cdot (u_1,u_2) + \lambda \cdot (v_1,v_2)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $(u_1,u_2),(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$.
- $(\lambda+\mu) \cdot (v_1,v_2) = \lambda \cdot (v_1,v_2) + \mu \cdot (v_1,v_2)$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$.
- $\lambda \cdot \big(\mu \cdot (v_1,v_2)\big) = (\lambda\,\mu) \cdot (v_1,v_2)$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$.
- $1 \cdot (v_1,v_2) = (v_1,v_2)$, para todo $(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$.

Con estas dos operaciones el conjunto $\mathbb{R}^2$ tiene estructura de **espacio vectorial** sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Esta estructura algebraica también será introducida en el siguiente tema.

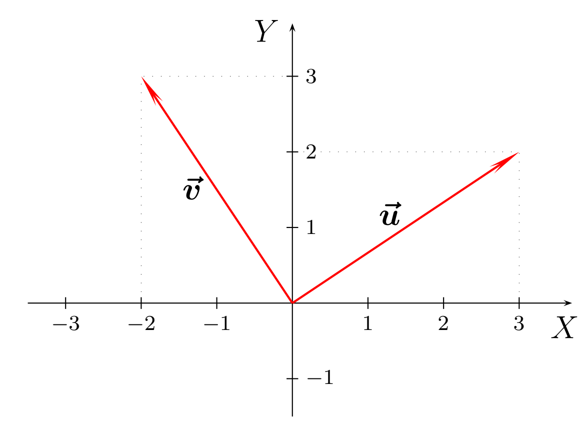
Los elementos de $\mathbb{R}^2$ se llaman **vectores** y los denotamos por

$$\vec{u} = (u_1,u_2)\ , \quad \vec{v} = (v_1,v_2)\ , \quad \ldots$$

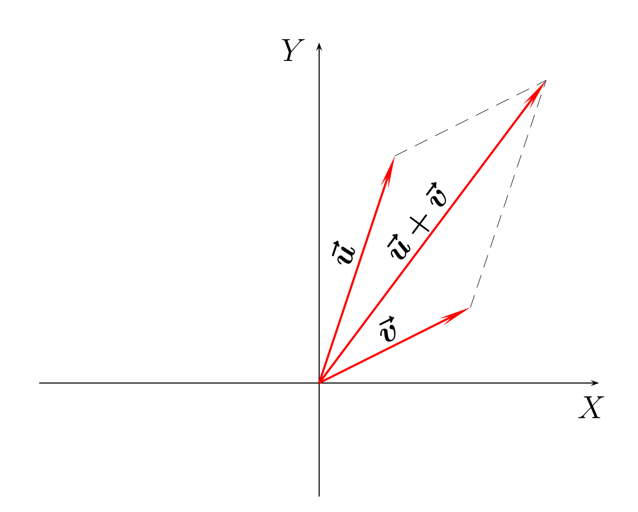
El vector nulo lo denotamos por $\vec{0} = (0,0)$.

El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ lo representamos en el plano considerando dos ejes perpendiculares.

Los vectores $\vec{u} = (3,2), \vec{v} = (-2,3) \in \mathbb{R}^2$ los representamos así:



La suma de vectores de $\mathbb{R}^2$ cumple la ley del paralelogramo. Así, dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$, la suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}$, es la diagonal del paralelogramo que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



Un **sistema de vectores** de $\mathbb{R}^2$ es una colección de vectores de $\mathbb{R}^2$, los cuales se pueden repetir.

Ejemplo 2.2.3
El conjunto $S = \{(-1,2),(0,-3),(5,1)\}$ es un sistema de vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

Una **base** del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ es un sistema de vectores de $\mathbb{R}^2$, formado por dos vectores $\{\vec{u},\vec{v}\}$ tal que

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

siendo $\vec{u}=(u_1,u_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$.

Ejemplo 2.2.4
El sistema de vectores $B=\{(1,-1),(2,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

El sistema de vectores $\{\vec{\imath},\vec{\jmath}\}$, donde $\vec{\imath}=(1,0)$ y $\vec{\jmath}=(0,1)$, es una base de $\mathbb{R}^2$, llamada **base canónica** de $\mathbb{R}^2$.

Se puede demostrar que dada una base $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ y un vector $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$, existen dos únicos escalares $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ tal que

$$\vec{v}=\lambda_1\cdot\vec{e}_1+\lambda_2\cdot\vec{e}_2$$

El par (λ_1,λ_2) se dice que son las **coordenadas** del vector $\vec{v}$ en la base B (respecto a la base B).

Ejemplo 2.2.5
Las coordenadas del vector $\vec{v} = (-2, -13)$ en la base $B = \{(1, -1), (2, 3)\}$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ son $(4, -3)$, ya que

$$\vec{v} = (-2, -13) = 4 \cdot (1, -1) + (-3) \cdot (2, 3)$$

Las coordenadas de un vector en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ coinciden son sus componentes:

$$\vec{v} = (v_1, v_2) = v_1 \cdot (1, 0) + v_2 \cdot (0, 1) = v_1 \cdot \vec{\imath} + v_2 \cdot \vec{\jmath}$$

Ejercicio 2.2.1
Calcula las coordenadas del vector $(-3, 1)$ respecto a la base $B = \{(1, 2), (1, 3)\}$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

2.2.2. El espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

En el conjunto $\mathbb{R}^3$, formado por todas las ternas ordenadas de números reales,

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

se pueden definir dos operaciones: suma y producto por un escalar.

Suma
Dados $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Con esta operación el conjunto $\mathbb{R}^3$ tiene estructura de grupo conmutativo.

Ejemplo 2.2.6
Sean $(2, -1, 3), (1, 4, -2) \in \mathbb{R}^3$. Entonces

$$(2, -1, 3) + (1, 4, -2) = (3, 3, 1)$$

Producto por un escalar
Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\lambda \cdot (v_1, v_2, v_3) = (\lambda\, v_1, \lambda\, v_2, \lambda\, v_3)$$

Ejemplo 2.2.7
Sean $3 \in \mathbb{R}$ y $(2, -1, 3) \in \mathbb{R}^3$. Entonces

$$3 \cdot (2, -1, 3) = (6, -3, 9)$$

El producto por un escalar cumple las mismas propiedades que en el caso del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$:

- $\lambda \cdot \big((u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)\big) = \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \lambda \cdot (v_1, v_2, v_3)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$.
- $(\lambda + \mu) \cdot (v_1, v_2, v_3) = \lambda \cdot (v_1, v_2, v_3) + \mu \cdot (v_1, v_2, v_3)$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$.
- $\lambda \cdot \big(\mu \cdot (v_1, v_2, v_3)\big) = (\lambda\,\mu) \cdot (v_1, v_2, v_3)$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$.
- $1 \cdot (v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3)$, para todo $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$.

Con estas dos operaciones el conjunto $\mathbb{R}^3$ tiene estructura de **espacio vectorial** sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

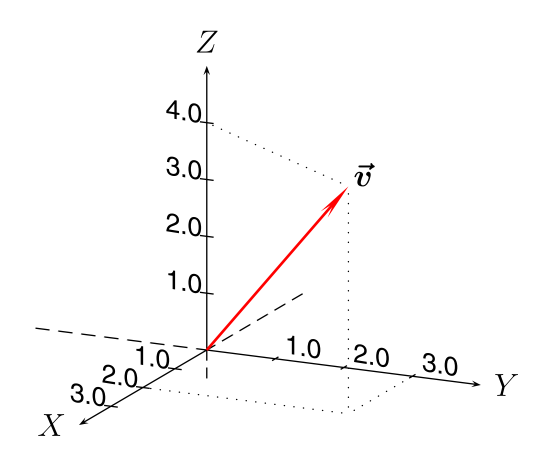
Los elementos de $\mathbb{R}^3$ se llaman **vectores** y los denotamos por

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)\ , \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)\ , \quad \ldots$$

El vector nulo lo denotamos por $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

El espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ lo representamos en el espacio considerando tres ejes perpendiculares.

El vector $\vec{v} = (2, 3, 4) \in \mathbb{R}^3$ lo representamos así:



La suma de vectores de $\mathbb{R}^3$ también cumple la regla del paralelogramo.

Un **sistema de vectores** de $\mathbb{R}^3$ es una colección de vectores de $\mathbb{R}^3$, los cuales se pueden repetir.

Ejemplo 2.2.8

El conjunto $S = \{(2, 1, 3), (4, -5, 1)\}$ es un sistema de vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

Dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son **linealmente independientes** si

$$\text{rang}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$$

En otro caso se dice que los dos vectores son **linealmente dependientes** o que los dos vectores **tienen la misma dirección**.

Si los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son linealmente dependientes y no nulos, entonces existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$, por tanto

$$(u_1, u_2, u_3) = \lambda \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

es decir, si $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$ y $v_3 \neq 0$, entonces

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} = \lambda$$

Si por el contrario, existe algún $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $v_i = 0$, entonces $u_i = 0$.

Ejemplo 2.2.9
Los vectores $(1, 1, 2)$ y $(2, 3, -1)$ son linealmente independientes, ya que

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

mientras que los vectores $(2, 0, 4)$ y $(6, 0, 12)$ son linealmente dependientes, ya que

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = 1 \neq 2$$

En este caso

$$(6, 0, 12) = 3 \cdot (2, 0, 4)$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{6}{2} = \frac{12}{4} = 3$$

Tres vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ son **linealmente independientes** si

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Se dice entonces que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son **no coplanarios**.

En otro caso se dice que los tres vectores son **linealmente dependientes** o **coplanarios**.

Ejemplo 2.2.10
Los vectores $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 0)$ y $(3, 1, 1)$ son linealmente independientes, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

mientras que los vectores $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 0)$ y $(3, 3, 1)$ son linealmente dependientes, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Una **base** del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ es un sistema de vectores de $\mathbb{R}^3$ formado por tres vectores linealmente independientes.

Ejemplo 2.2.11
El sistema de vectores $B = \{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (3, 1, 1)\}$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ es una base de $\mathbb{R}^3$ ya que, como hemos visto en el Ejemplo 2.2.10, sus tres vectores son linealmente independientes.

El sistema de vectores $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, donde $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$, es una base de $\mathbb{R}^3$, llamada **base canónica** de $\mathbb{R}^3$. Hay que hacer notar aquí que los símbolos $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$ también se han utilizado anteriormente para los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Dada una base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, existen tres únicos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{e}_3$$

La terna $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ se dice que son las **coordenadas** del vector $\vec{v}$ en la base B.

Ejemplo 2.2.12
Las coordenadas del vector $\vec{v} = (5, 9, 3)$ respecto a la base

$$B = \{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (3, 1, 1)\}$$

del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ son $(4, 2, -1)$, ya que

$$\vec{v} = (5, 9, 3) = 4 \cdot (1, 2, 1) + 2 \cdot (2, 1, 0) + (-1) \cdot (3, 1, 1)$$

Ejercicio 2.2.2
Calcula las coordenadas del vector $(9, -3, 5)$ respecto a la base

$$B = \{(1, -1, 2), (0, 2, -1), (2, 1, 0)\}$$

del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

Las coordenadas de un vector en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ coinciden son sus componentes:

$$\begin{aligned} \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) &= v_1 \cdot (1, 0, 0) + v_2 \cdot (0, 1, 0) + v_3 \cdot (0, 0, 1) \\ &= v_1 \cdot \vec{\imath} + v_2 \cdot \vec{\jmath} + v_3 \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

2.3. Los espacios vectoriales euclídeos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

En esta sección introducimos en los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ el producto escalar usual, el cual nos permite definir los conceptos de módulo (longitud) de un vector y ángulo entre dos vectores.

2.3.1. Producto escalar

Llamamos **producto escalar** de los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$, al número real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Ejemplo 2.3.1
El producto escalar de los vectores $\vec{u} = (2, 1, 3)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 5)$ de $\mathbb{R}^3$ es

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = -2 + 1 + 15 = 14$$

Hay que hacer notar que el símbolo " $\cdot$ " tanto lo empleamos para designar el producto de números reales, como para el producto de un escalar y un vector o para el producto escalar de vectores.

El producto escalar cumple las propiedades:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.
- $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{w} + \mu\vec{v} \cdot \vec{w}$, para todo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \neq \vec{0}$.

De esta forma el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ es un **espacio vectorial euclídeo**.

De forma similar podemos definir el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^2$.

2.3.2. Módulo de un vector

Llamamos **módulo** del vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, al número real

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$$

Ejemplo 2.3.2
El módulo del vector $\vec{v} = (2, 3, -1)$ es

$$||\vec{v}|| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

El módulo de un vector cumple las siguientes propiedades:

- $||\vec{v}|| > 0$, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Además, $||\vec{0}|| = 0$.
- $||\lambda\vec{v}|| = |\lambda|\,||\vec{v}||$, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.
- $||\vec{u} + \vec{v}|| \leqslant ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

De la misma forma podemos definir el módulo de un vector de $\mathbb{R}^2$.
Un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ es un **vector unitario** si $||\vec{v}|| = 1$.

Ejemplo 2.3.3
El vector $\vec{v} = (1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14})$ es un vector unitario, ya que

$$\begin{aligned} ||\vec{v}|| &= \sqrt{(1/\sqrt{14})^2 + (2/\sqrt{14})^2 + (3/\sqrt{14})^2} \\ &= \sqrt{1/14 + 4/14 + 9/14} = \sqrt{14/14} = 1 \end{aligned}$$

Dado un vector no nulo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, entonces los vectores

$$\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}\,, \qquad -\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$$

son unitarios y tienen la misma dirección que $\vec{v}$.

Los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{\imath} = (1, 0, 0)\,, \quad \vec{\jmath} = (0, 1, 0)\,, \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

son vectores unitarios.

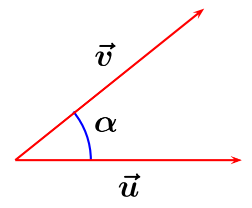
Igualmente podemos definir el concepto de vector unitario en $\mathbb{R}^2$ y observar que los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ son vectores unitarios.

2.3.3. Ángulo entre dos vectores

Sean dos vectores no nulos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. El **ángulo** que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ viene dado por su coseno:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||}$$

donde $\alpha \in [0, \pi]$.



Ejemplo 2.3.4
El ángulo entre los vectores $\vec{u} = (0, -3, 5)$ y $\vec{v} = (1, 1, 10)$ es $\alpha \approx 0.65$ radianes, ya que

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||} = \frac{(0,-3,5)\cdot(1,1,10)}{||(0,-3,5)||\,||(1,1,10)||} = \frac{47}{\sqrt{34}\sqrt{102}} = \frac{47}{34\sqrt{3}} \approx 0.8$$

y así
$$\alpha = \arccos\left(47/(34\sqrt{3})\right) \approx 0.65 \text{ radianes}$$

Dos vectores no nulos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ son **ortogonales**, si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Ejemplo 2.3.5
Los vectores $\vec{u} = (2, -1, 3)$ y $\vec{v} = (1, 5, 1)$ son ortogonales, ya que

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,-1,3)\cdot(1,5,1) = 2 - 5 + 3 = 0$$

Los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ son ortogonales. Entonces se dice que la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es una **base ortonormal**, ya que sus vectores son ortogonales y unitarios.

De forma análoga podemos definir el ángulo entre dos vectores de $\mathbb{R}^2$.

2.3.4. Producto vectorial

Dados dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, llamamos **producto vectorial** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al vector que viene definido por el desarrollo formal del siguiente determinante por la primera fila:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\,\vec{\imath} - (u_3v_1 - u_1v_3)\,\vec{\jmath} + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\vec{k}$$
$$= (u_2v_3 - u_3v_2, -u_3v_1 + u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Ejemplo 2.3.6
El producto vectorial de los vectores $\vec{u} = (0, -3, 5)$ y $\vec{v} = (3, 1, 10)$ es

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -35\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 3\vec{k} = (-35, 5, 3)$$

El producto vectorial cumple las siguientes propiedades:

- $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$ si, y sólo si, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes.

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.
- $\vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$, para todo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$.
- $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$, para todo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$.
- $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 2.3.1
Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$ no coplanarios. Señala en cada apartado si los vectores que se dan tienen la misma dirección, son ortogonales o si no puede asegurarse nada:

(a) $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u}$

(b) $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{w}$

(c) $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u}$

(d) $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{v}$

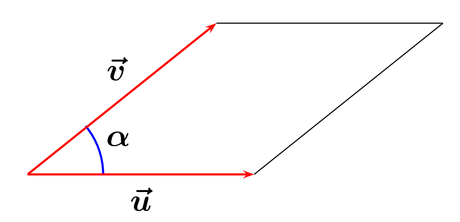
(e) $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$

(f) $(\vec{u} + 2\vec{v}) \times \vec{u}$, $\vec{u} \times \vec{v}$

Además:

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\ \mathrm{sen}\,\alpha$$

es el área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, donde $\alpha \in [0, \pi]$ es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.



Ejemplo 2.3.7
El área del paralelogramo determinado por el vector $\vec{u} = (2, 3, 1)$ y por el vector $\vec{v} = (-1, -2, 0)$ es

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = \sqrt{6}$$

ya que

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (2, -1, -1)$$

y así

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

2.3.5. Producto mixto

Dados tres vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, llamamos **producto mixto** de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ al número real

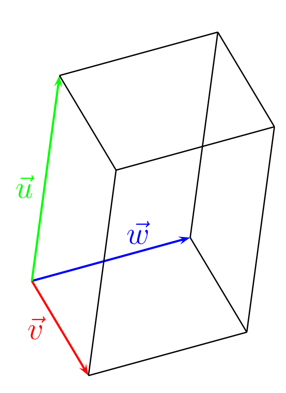
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Las propiedades del producto mixto se deducen de las propiedades de los productos escalar y vectorial, y de las propiedades de los determinantes.

Además:

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

es el volumen del paralelepípedo cuyas aristas vienen determinadas por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.



Ejemplo 2.3.8
El volumen del paralelepípedo cuyas aristas vienen determinadas por los tres vectores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (-1, -2, 0)$ y $\vec{w} = (1, -1, 2)$ es

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 7$$

ya que

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

2.4. Geometría afín y euclídea

En este apartado nos centramos en el espacio afín tridimensional, considerando las variedades lineales afines (rectas y planos) y estudiando las posiciones relativas entre ellas. Mediante la estructura euclídea vista en la sección anterior, introducimos el ángulo y la distancia entre dos variedades lineales afines.

2.4.1. El espacio afín tridimensional

El **espacio afín tridimensional** está formado por un conjunto E_3 (a cuyos elementos se les llama **puntos**), el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y una aplicación

$$\begin{aligned} + : E_3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow E_3 \\ (P, \vec{v}) &\longrightarrow P + \vec{v} \end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades:

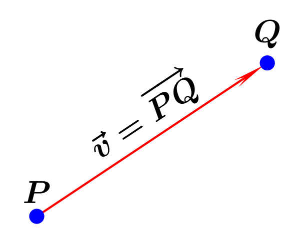
- $P + (\vec{u} + \vec{v}) = (P + \vec{u}) + \vec{v}$, para todo $P \in E_3$ y para todo $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.
- Dados $(P, Q) \in E_3 \times E_3$ existe un único vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $P + \vec{v} = Q$.

Se llama **vector fijo** a un par (P, Q) de puntos de E_3 y se representa por $\overrightarrow{PQ}$. Se dice que P es el origen y Q el extremo del vector fijo $\overrightarrow{PQ}$.

Por la segunda propiedad anterior se tiene que dado el vector fijo $\overrightarrow{PQ}$, es decir el par de puntos (P, Q), existe un único vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $Q = P + \vec{v}$.
El vector $\vec{v}$ se llama **vector libre** y se conviene en decir que el vector fijo $\overrightarrow{PQ}$ es un representante del vector $\vec{v}$.
Cuando se escribe

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$$

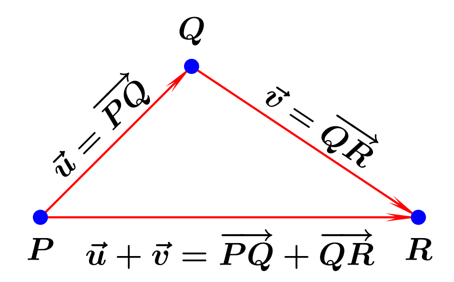
se está identificando el vector fijo $\overrightarrow{PQ}$ con el vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ que representa.



Con esta identificación la primera propiedad se escribe

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

para cada $P, Q, R \in E_3$.



Dados un punto O (origen) de E_3 y una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, se dice que $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es una **referencia cartesiana** de E_3.

Cuando la base es ortonormal, a la referencia se le llama **referencia cartesiana rectangular**.

Se llaman **coordenadas cartesianas (rectangulares)** de un punto $P \in E_3$ respecto a una referencia cartesiana (rectangular) $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, a las coordenadas $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ del vector $\overrightarrow{OP}$ en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

A partir de aquí consideraremos la referencia cartesiana rectangular $\{O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, donde $O \in E_3$ es un origen cualquiera.

Dado $P \in E_3$, si

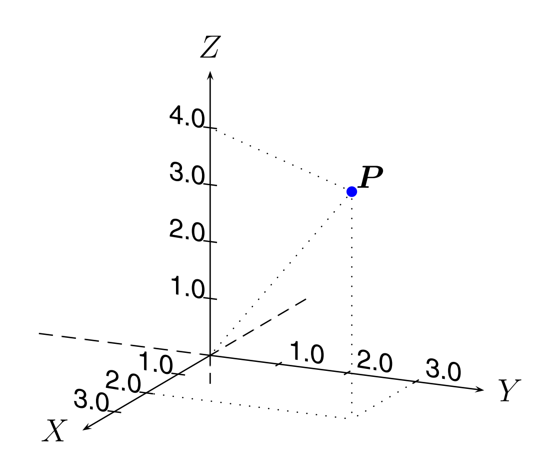
$$\overrightarrow{OP} = (p_1, p_2, p_3) = p_1\vec{\imath} + p_2\vec{\jmath} + p_3\vec{k}$$

escribiremos $P = (p_1, p_2, p_3)$, indicando que (p_1, p_2, p_3) son las coordenadas del punto P en la referencia cartesiana rectangular $\{O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.
La primera coordenada, p_1, se llama **abscisa**.
La segunda coordenada, p_2, se llama **ordenada**.
La tercera coordenada, p_3, se llama **cota**.

Si $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces

$$Q = P + \vec{v} = (p_1 + v_1, p_2 + v_2, p_3 + v_3)$$

Aquí representamos gráficamente el punto $P = (2, 3, 4)$:



Dados $P, Q \in E_3$, se llama **distancia** entre los puntos P y Q al número real

$$d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

siendo $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$; evidentemente, la distancia entre P y Q la podemos definir porque $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial euclídeo.

Ejemplo 2.4.1
La distancia entre los puntos $P = (3, -1, 2)$ y $Q = (5, -4, 1)$ es

$$d(P, Q) = \sqrt{(5-3)^2 + (-4-(-1))^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1} = \sqrt{14}$$

Entonces, se dice que el espacio afín tridimensional tiene estructura de **espacio afín euclídeo**.

La distancia cumple las siguientes propiedades:

- $d(P, Q) = 0$ si, y sólo si, $P = Q$.
- $d(P, Q) = d(Q, P)$, para todo $P, Q \in E_3$.
- $d(P, R) \leqslant d(P, Q) + d(Q, R)$, para todo $P, Q, R \in E_3$.

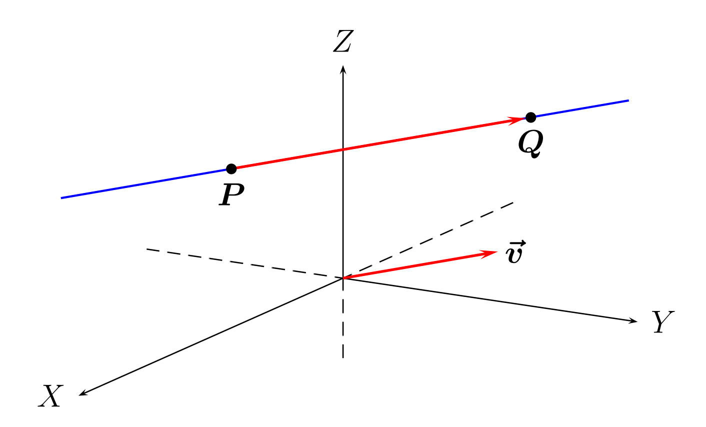
2.4.2. Variedades lineales afines

Entenderemos como variedades lineales afines del espacio afín tridimensional las rectas y los planos.

Recta

Dado un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y un vector no nulo $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, se llama **recta** que pasa por P y tiene la dirección de $\vec{v}$ al conjunto formado por los puntos Q, tales que $\overrightarrow{PQ} = \lambda\,\vec{v}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, tales que

$$Q = P + \lambda\,\vec{v}\,, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$



El vector $\vec{v}$ se llama **vector director** de la recta.

Si $Q = (x, y, z)$, entonces

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\,(v_1, v_2, v_3)$$

La ecuación anterior se llama **ecuación vectorial** de la recta.

Las ecuaciones

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\,v_1 \\ y = y_0 + \lambda\,v_2 \\ z = z_0 + \lambda\,v_3 \end{cases}$$

se llaman **ecuaciones paramétricas** de la recta.

La expresión

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

se llama **ecuación continua** de la recta.

Ejemplo 2.4.2
La recta que pasa por el punto $P = (1, -2, 3)$ y tiene como vector director al vector $\vec{v} = (2, 4, 0)$, tiene como ecuación vectorial

$$(x, y, z) = (1, -2, 3) + \lambda(2, 4, 0)$$

como ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

y como ecuación continua

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{0}$$

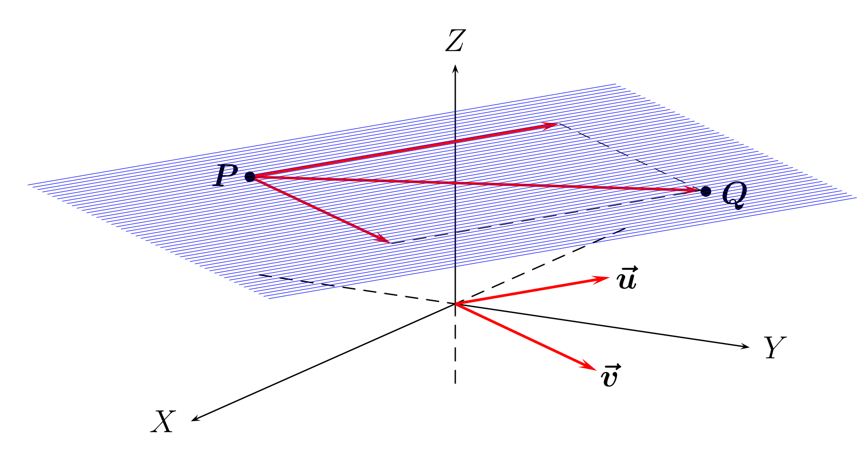
La expresión formal

$$\frac{z-3}{0}$$

en la ecuación continua de la recta sólo significa que los puntos de dicha recta tienen su tercera coordenada constante e igual a 3 ($z = 3$).

Plano
Dado un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ linealmente independientes, se llama **plano** que pasa por el punto P y tiene a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como vectores directores, al conjunto formado por los puntos Q, tales que $\overrightarrow{PQ} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, es decir, tales que

$$Q = P + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}\,, \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$



Si $Q = (x, y, z)$, entonces

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\,(u_1, u_2, u_3) + \mu\,(v_1, v_2, v_3)$$

La ecuación anterior se llama **ecuación vectorial** del plano.

Las ecuaciones

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

se llaman **ecuaciones paramétricas** del plano.

Ejemplo 2.4.3
El plano que pasa por el punto $P = (-1, 3, 1)$ y tiene como vectores directores a los vectores $\vec{u} = (2, 5, -1)$ y $\vec{v} = (-3, 2, -1)$ tiene como ecuación vectorial

$$(x, y, z) = (-1, 3, 1) + \lambda (2, 5, -1) + \mu (-3, 2, -1)$$

y como ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda - 3\mu \\ y = 3 + 5\lambda + 2\mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases}$$

Como los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son linealmente independientes, el sistema

$$\begin{cases} \lambda u_1 + \mu v_1 = x - x_0 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 = y - y_0 \\ \lambda u_3 + \mu v_3 = z - z_0 \end{cases}$$

es compatible determinado (las incógnitas son λ y μ), es decir

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x - x_0 \\ u_2 & v_2 & y - y_0 \\ u_3 & v_3 & z - z_0 \end{pmatrix} = 2$$

y por tanto

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - x_0 \\ u_2 & v_2 & y - y_0 \\ u_3 & v_3 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos la llamada **ecuación general** del plano:

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$$

Ejemplo 2.4.4
La ecuación general del plano del Ejemplo 2.4.3 es

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & x + 1 \\ 5 & 2 & y - 3 \\ -1 & -1 & z - 1 \end{vmatrix} = 0$$

es decir

$$3x - 5y - 19z + 37 = 0$$

Dado el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ linealmente independientes, consideramos el vector

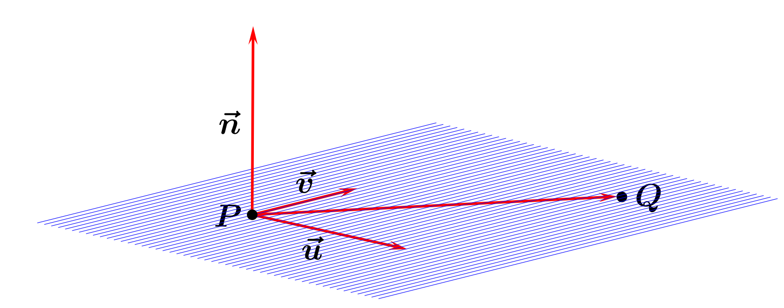
$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

el cual es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y se llama **vector normal** al plano.

Ejemplo 2.4.5
El vector normal del plano del Ejemplo 2.4.3 es

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-3, 5, 19)$$

Si $Q = (x, y, z)$ es un punto del plano determinado por el punto P y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$



entonces los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\vec{n}$ son ortogonales.

Si $\vec{n} = (A, B, C)$, entonces

$$0 = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$$

de donde

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$$

siendo $D = -A\,x_0 - B\,y_0 - C\,z_0$.

2.4.3. Posiciones relativas entre variedades lineales afines

Posiciones relativas entre dos rectas
Sean las rectas

$$r \equiv P + \lambda\,\vec{u}\,, \quad s \equiv Q + \mu\,\vec{v}$$

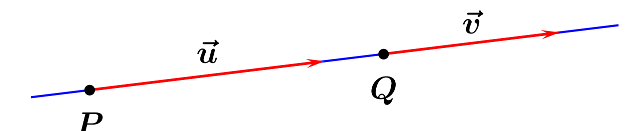
donde $P = (a, b, c)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $Q = (a', b', c')$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

$\boxed{1}$ Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes

$$\text{rang}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 1$$

entonces las rectas r y s son paralelas, en cuyo caso lo designamos por $r \parallel s$, o son coincidentes, en cuyo caso escribimos $r = s$.

a Si el punto P pertenece a la recta s o, equivalentemente, el punto Q pertenece a la recta r, entonces $r = s$.



Ejemplo 2.4.6
Sean las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = 5 - y = z + 3 \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 7 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

La recta r pasa por el punto $P = (-1, 5, -3)$ y tiene como vector director al vector $\vec{u} = (2, -1, 1)$, mientras que la recta s pasa por el punto $Q = (7, 1, 1)$ y tiene como vector director al vector $\vec{v} = (-2, 1, -1)$. Por una parte

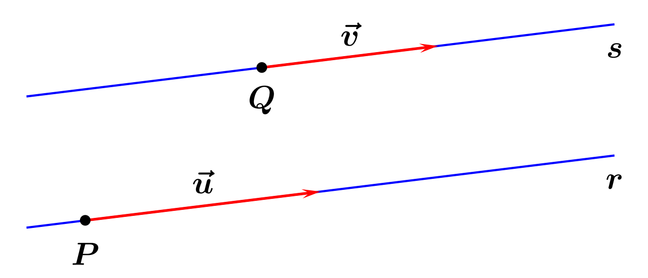
$$\vec{v} = (-2, 1, -1) = -\vec{u}$$

es decir, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes. Por otra parte

$$\frac{7+1}{2} = 5 - 1 = 1 + 3$$

esto es, $Q \in s$. Por tanto, las rectas r y s son coincidentes.

b Si el punto P no pertenece a la recta s o, equivalentemente, el punto Q no pertenece a la recta r, entonces $r \parallel s$.



Ejemplo 2.4.7
Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{5-x}{2} = y - 1 = 1 - z$$

La recta r pasa por el punto $P = (-1, 5, -3)$ y tiene como vector director al vector $\vec{u} = (2, -1, 1)$; la recta s pasa por el punto $Q = (5, 1, 1)$ y tiene como vector director al vector $\vec{v} = (-2, 1, -1)$. Por una parte

$$\vec{u} = (2, -1, 1) = -\vec{v}$$

es decir, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes. Por otra parte

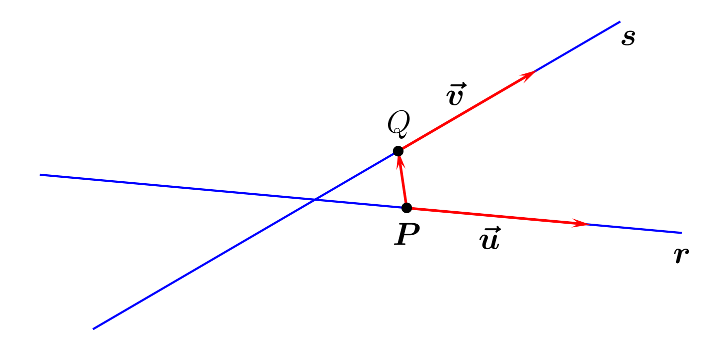
$$\frac{5-(-1)}{2} = 3 \neq 4 = 5-1 = 1-(-3)$$

esto es, $P \notin s$. Por tanto, las rectas r y s son paralelas.

2 Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes y los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes

$$\text{rang}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2\,, \qquad \left[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}\right] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ a'-a & b'-b & c'-c \end{vmatrix} = 0$$

entonces las rectas r y s se cortan.



Ejemplo 2.4.8
Sean las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = -y-2 = \frac{z-1}{0} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -5 + 3\lambda \end{cases}$$

La recta r pasa por el punto $P = (1, -2, 1)$ y tiene como vector director al vector $\vec{u} = (2, -1, 0)$; la recta s pasa por el punto $Q = (1, 1, -5)$ y tiene como vector director al vector $\vec{v} = (1, -2, 3)$. Por una parte, los vectores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ y $\vec{v} = (1, -2, 3)$ son linealmente independientes, ya que

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

al tener esta matriz un menor de orden 2 distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Por otra parte,

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}\right] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1-1 & 1-(-2) & -5-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, las rectas r y s se cortan (en un punto).
El punto de corte se obtiene, por ejemplo, resolviendo el sistema

$$\frac{1+\lambda-1}{2} = -(1-2\lambda)-2 = \frac{-5+3\lambda-1}{0}$$

es decir

$$\frac{\lambda}{2} = 2\lambda - 3 = \frac{-6+3\lambda}{0}$$

Por tanto, $\lambda = 2$. Entonces, el punto de corte es $(3, -3, 1)$.
Aquí hay que hacer notar que la ecuación

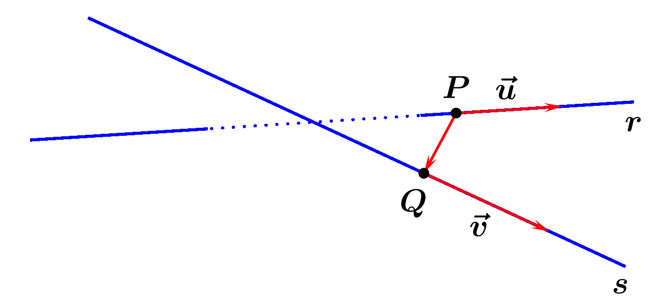
$$2\lambda - 3 = \frac{-6+3\lambda}{0}$$

significa que $-6+3\lambda = 0$.

3 Si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente independientes

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}\right] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ a'-a & b'-b & c'-c \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces las rectas r y s se cruzan.



Ejemplo 2.4.9
Sean las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = -y-2 = \frac{z-1}{0} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = -5 + 3\lambda \end{cases}$$

La recta r pasa por el punto $P = (1, -2, 1)$ y tiene como vector director al vector $\vec{u} = (2, -1, 0)$; la recta s pasa por el punto $Q = (-3, 2, -5)$ y tiene como vector director al vector $\vec{v} = (1, -2, 3)$. Entonces, el vector $\overrightarrow{PQ} = (-4, 4, -6)$.
Además

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}\right] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Por tanto, las rectas r y s se cruzan.

Posiciones relativas entre dos planos
Sean los planos

$$\pi \equiv A\,x + B\,y + C\,z + D = 0\,, \quad \pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

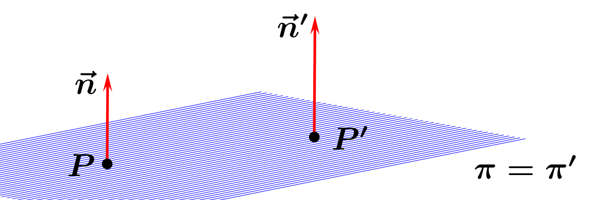
y sean $P \in \pi$, $P' \in \pi'$, y $\vec{n} = (A, B, C)$, $\vec{n}' = (A', B', C')$ los vectores normales a los planos π y π', respectivamente.

1 Si los vectores $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ son linealmente dependientes

$$\text{rang}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 1$$

entonces los planos π y π' son paralelos, en cuyo caso lo designamos por $\pi \parallel \pi'$, o son coincidentes, en cuyo caso escribimos $\pi = \pi'$.

a Si el punto P pertenece al plano π' o, equivalentemente, el punto P' pertenece al plano π, entonces $\pi = \pi'$.



Ejemplo 2.4.10
Veamos que los planos

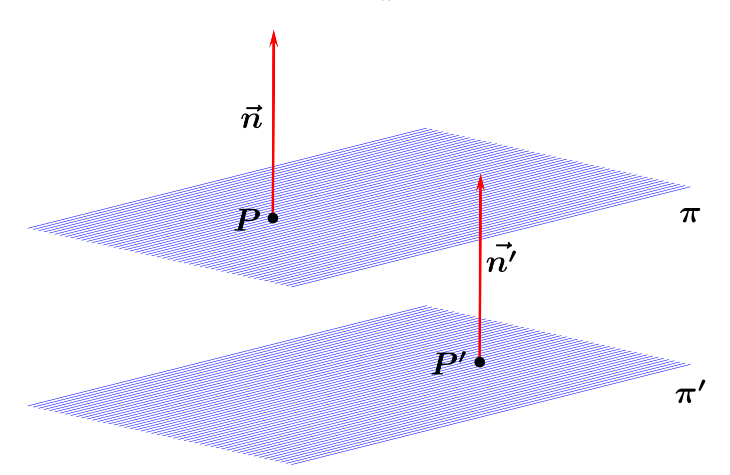
$$\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0\,, \quad \pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda - 3\mu \\ y = 4 - \lambda + 2\mu \\ z = 3 - 5\lambda + 8\mu \end{cases}$$

son coincidentes.
Por una parte, el vector $\vec{n} = (2, -1, 1)$ es el vector normal al plano π y el punto $P = (0, 0, 1) \in \pi$.
Por otra parte, como

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$$

se tiene que $\vec{n}' = (2, -1, 1)$ es el vector normal al plano π' y, además, el punto $Q = (1, 4, 3) \in \pi'$.
Entonces, los vectores $\vec{n}$ y $\vec{n'}$ son linealmente independientes (son iguales) y $Q \in \pi$.
Por tanto, los planos π y π' son coincidentes.

b Si el punto P no pertenece al plano π' o, equivalentemente, el punto P' no pertenece al plano π, entonces $\pi \parallel \pi'$.



Ejemplo 2.4.11
Veamos que los planos

$$\pi \equiv 2x - 4y + 5z - 2 = 0\,, \quad \pi' \equiv 4x - 8y + 10z + 8 = 0$$

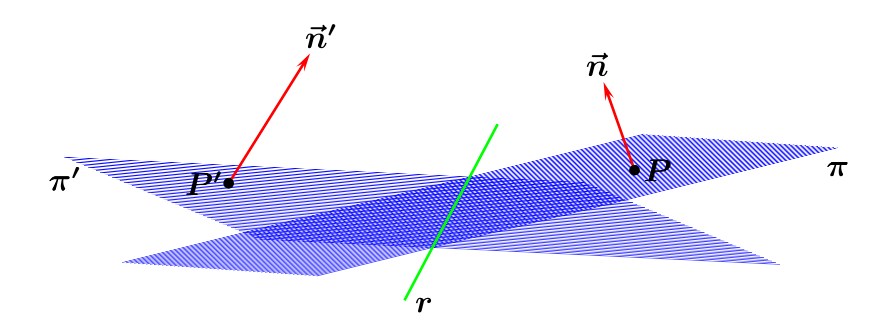
son paralelos.

Los vectores $\vec{n} = (2, -4, 5)$ y $\vec{n}' = (4, -8, 10)$ son los vectores normales a los planos π y π', respectivamente; estos vectores son linealmente dependientes, ya que $\vec{n}' = 2\vec{n}$, y el punto $P = (1, 0, 0) \in \pi$, pero no pertenece al plano π' ($P \notin \pi'$).
Por tanto, los planos π y π' son paralelos.

2 Si los vectores $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ son linealmente independientes

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2$$

entonces los planos π y π' se cortan (en una recta r).



La recta r queda determinada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones implícitas** de la recta r.

Ejemplo 2.4.12
Veamos que los planos

$$\pi \equiv 2x - 3y + 4z + 1 = 0\,, \qquad \pi' \equiv x + y - z + 2 = 0$$

se cortan (en una recta r).
Los vectores $\vec{n} = (2, -3, 4)$ y $\vec{n}' = (1, 1, -1)$ son los vectores normales a los planos π y π', respectivamente. Estos vectores son linealmente independientes, ya que

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto, los planos π y π' se cortan.
La recta r tiene como ecuaciones implícitas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 4z + 1 = 0 \\ \;\; x + \;\; y - \;\; z + 2 = 0 \end{cases}$$

Posiciones relativas entre una recta y un plano
Sea la recta

$$r \equiv P + \lambda\,\vec{v}$$

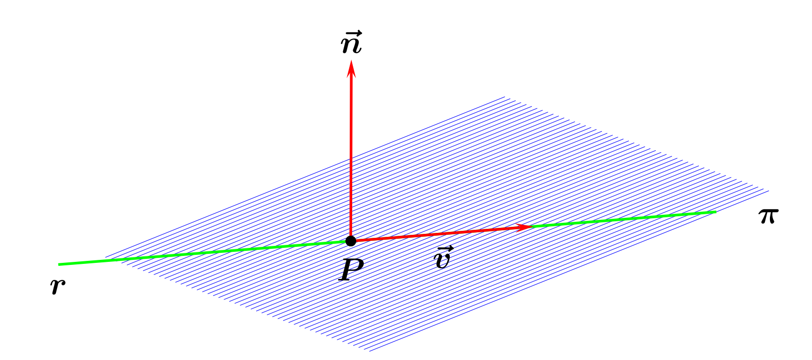
donde $P = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, y sea el plano

$$\pi \equiv A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$$

siendo $\vec{n} = (A, B, C)$ el vector normal al plano π.

1. Si los vectores $\vec{v}$ y $\vec{n}$ son ortogonales, entonces la recta r y el plano π son paralelos, en cuyo caso lo designamos por $r \parallel \pi$, o la recta r está contenida en el plano π, en cuyo caso escribimos $r \subset \pi$.

   a. Si $P \in \pi$, entonces $r \subset \pi$.



Ejemplo 2.4.13
Veamos que la recta

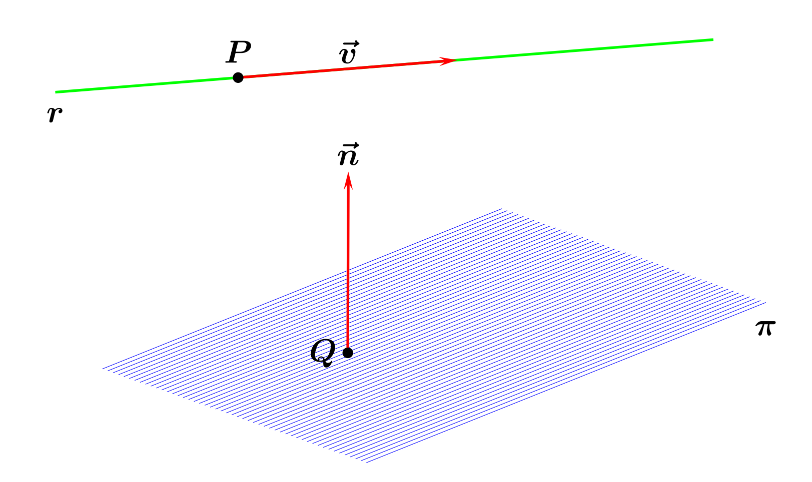
$$r \equiv x - 3 = \frac{y+2}{2} = -z + 4$$

está contenida en el plano $\pi \equiv x - y - z - 1 = 0$.
La recta r pasa por el punto $P = (3, -2, 4)$ y tiene como vector director al vector $\vec{v} = (1, 2, -1)$. El plano π tiene vector normal $\vec{n} = (1, -1, -1)$.
Entonces

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (1, 2, -1) \cdot (1, -1, -1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

Además, $P \in \pi$, ya que $3 - (-2) - 4 - 1 = 0$.
Por tanto, la recta r está contenida en el plano π.

b Si $P \notin \pi$, entonces $r \parallel \pi$.



Ejemplo 2.4.14
Veamos que la recta

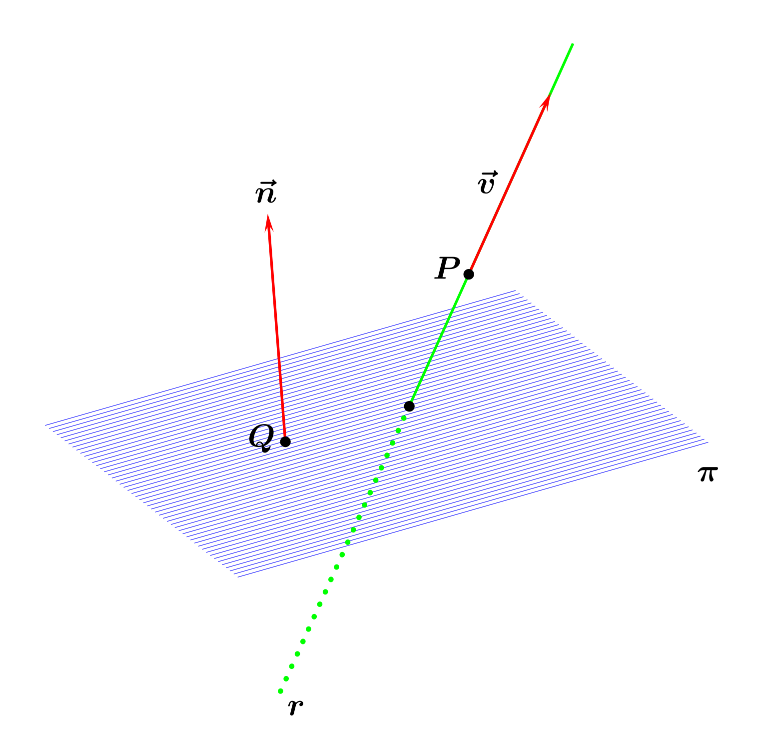
$$r \equiv x - 3 = \frac{y+2}{2} = -z + 4$$

es paralela al plano $\pi \equiv x - y - z + 2 = 0$.
La recta r pasa por el punto $P = (3, -2, 4)$ y tiene como vector director al vector $\vec{v} = (1, 2, -1)$. El plano π tiene vector normal $\vec{n} = (1, -1, -1)$.
Entonces

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (1, 2, -1) \cdot (1, -1, -1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

Además, $P \notin \pi$, ya que $3 - (-2) - 4 + 2 = 3 \neq 0$.
Por tanto, la recta r es paralela al plano π.

2 Si los vectores $\vec{v}$ y $\vec{n}$ no son ortogonales ($\vec{v} \not\perp \vec{n}$), entonces la recta r y el plano π se cortan (en un punto).



Ejemplo 2.4.15
Veamos que la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$$

y el plano $\pi \equiv 2x + y + 4z + 10 = 0$ se cortan (en un punto).
La recta r pasa por el punto $P = (1, -1, 2)$ y tiene como vector director al vector $\vec{v} = (2, -1, 3)$. El plano π tiene vector normal $\vec{n} = (2, 1, 4)$.
Entonces

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (2, -1, 3) \cdot (2, 1, 4) = 4 - 1 + 12 = 15 \neq 0$$

Por tanto, la recta r y el plano π se cortan (en un punto).
Para obtener el punto de corte resolvemos la ecuación:

$$2(1 + 2\lambda) + (-1 - \lambda) + 4(2 + 3\lambda) + 10 = 0$$

es decir

$$19 + 15\lambda = 0$$

Por tanto

$$\lambda = -\frac{19}{15}$$

y así

$$x = 1 - 2\,\frac{19}{15} = -\frac{23}{15}\,, \quad y = -1 + \frac{19}{15} = -\frac{4}{15}\,, \quad z = 2 - 3\,\frac{19}{15} = -\frac{27}{15} = -\frac{9}{5}$$

es decir, el punto de corte es $Q = (-23/15, -4/15, -9/5)$.

Ejercicio 2.4.1
Estudia la posición relativa de los siguientes pares de variedades lineales afines:

(a) El plano $3x + 2z - 1 = 0$ y la recta

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1 + 4\lambda \\ y &=& -\lambda \\ z &=& 2 \end{array}\right.$$

(b) Las rectas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}\,, \qquad \left\{\begin{array}{l} x - z = 0 \\ y = 3 \end{array}\right.$$

(c) Los planos $2x - 3y + z - 1 = 0$ y $x + y - 2z + 1 = 0$.

Ejercicio 2.4.2
Estudia, en función del parámetro real a, la posición relativa de los siguientes pares de variedades lineales afines:

(a) $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1 + \alpha - \beta \\ y &=& 2 - \alpha + \beta \\ z &=& 1 + \alpha \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1 - a\,\alpha + \beta \\ y &=& \alpha - \beta \\ z &=& 3 + a\,\alpha + 2\beta \end{array}\right.$$

(b) $$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ a\,x - 3z = -5 \end{array}\right. , \qquad 6x - 4y - 3z + 3 = 0$$

(c) $$-2x + y + 4 = 0\,, \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3 - \alpha \\ y &=& 2 - 2\alpha \\ z &=& 1 + a\,\beta \end{array}\right.$$

(d) $3x - y - z = 0\,, \quad -6x + a\,y + 2z + 1 = 0.$

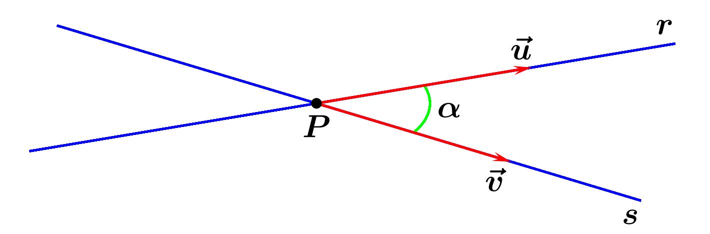
(e) $2x - y + 1 = 0\,, \quad x + 4y + a\,z - 3 = 0.$

2.4.4. Ángulo entre variedades lineales afines

Ángulo entre dos rectas que se cortan

Sean dos rectas que se cortan (en un punto P):

$$r \equiv P + \lambda\,\vec{u}\,, \quad s \equiv P + \mu\,\vec{v}$$



Entonces

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||}$$

Ejemplo 2.4.16
Sean las rectas r y s del Ejemplo 2.4.8, las cuales, como ya vimos, se cortan.
Los vectores directores de las rectas r y s son, respectivamente, $\vec{u} = (2,-1,0)$ y $\vec{v} = (1,-2,3)$. Entonces, el coseno del ángulo que forman las rectas r y s es

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||} = \frac{|(2,-1,0)\cdot(1,-2,3)|}{||(2,-1,0)||\,||(1,-2,3)||} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{14}}$$

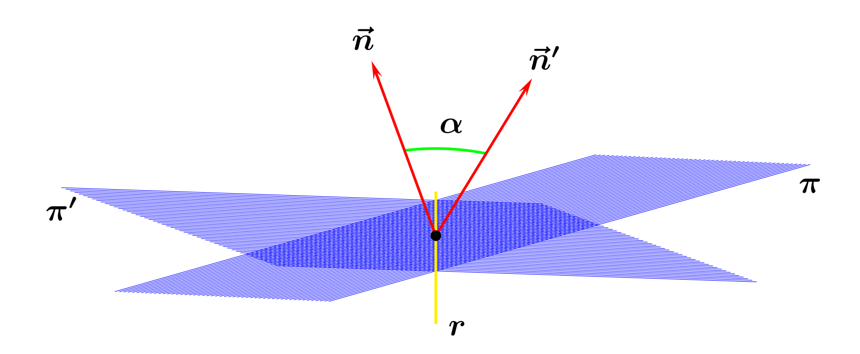
Por tanto

$$\alpha = \arccos(4/\sqrt{70}) \approx 1.07 \text{ radianes}$$

Ángulo entre dos planos que se cortan
Sean dos planos que se cortan (en una recta r):

$$\pi \equiv A\,x + B\,y + C\,z + D = 0\,, \quad \pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

siendo $\vec{n} = (A,B,C)$ y $\vec{n}' = (A',B',C')$ los vectores normales a los planos π y π', respectivamente.



Entonces

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{||\vec{n}||\,||\vec{n}'||}$$

Ejemplo 2.4.17
Sean los planos π y π' del Ejemplo 2.4.12, los cuales, como ya vimos, se cortan.
Los vectores normales de los planos π y π' son, respectivamente, $\vec{n} = (2,-3,4)$ y $\vec{n}' = (1,1,-1)$. Entonces, el coseno del ángulo que forman los planos π y π' es

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}|}{||\vec{n}||\,||\vec{n}||} = \frac{|(2,-3,4)\cdot(1,1,-1)|}{||(2,-3,4)||\,||(1,1,-1)||} = \frac{5}{\sqrt{29}\sqrt{3}}$$

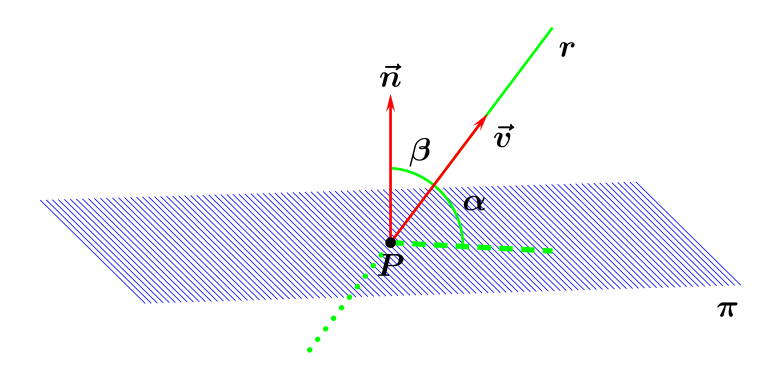
Por tanto

$$\alpha = \arccos(5/\sqrt{87}) \approx 1.005 \text{ radianes}$$

Ángulo entre un plano y una recta que se cortan
Sean un plano y una recta que se cortan (en un punto P):

$$\pi \equiv A\,x + B\,y + C\,z + D = 0\,, \quad r \equiv P + \lambda\,\vec{v}$$

donde $\vec{n} = (A, B, C)$ es el vector normal al plano π.



Entonces

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{||\vec{v}||\;||\vec{n}||}\,, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Ejemplo 2.4.18
Sean la recta r y el plano π del Ejemplo 2.4.15, los cuales, como ya vimos, se cortan. El vector director de la recta r es $\vec{v} = (2, -1, 3)$ y el vector normal al plano π es $\vec{n} = (2, 1, 4)$. Entonces, el seno del ángulo que forman la recta r y el plano π es

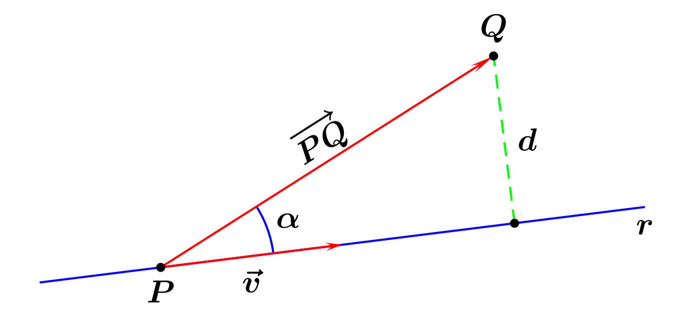
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{||\vec{v}||\;||\vec{n}||} = \frac{|(2,-1,3)\cdot(2,1,4)|}{||(2,-1,3)||\;||(2,1,4)||} = \frac{15}{\sqrt{14}\sqrt{21}}$$

Por tanto

$$\alpha = \arccos(14/\sqrt{294}) \approx 1.065 \text{ radianes}$$

2.4.5. Distancia entre variedades lineales afines

Distancia de un punto a una recta
Sea una recta $r \equiv P + \lambda\,\vec{v}$ y sea un punto $Q \notin r$.



Entonces, la distancia entre el punto Q y la recta r, que denotamos por $d(Q,r)$, es:

$$d(Q,r) = \frac{||\vec{v} \times \overrightarrow{PQ}||}{||\vec{v}||}$$

Ejemplo 2.4.19
Sean el punto $Q = (1,-2,3)$ y la recta determinada por el punto $P = (-1,3,4)$ y el vector (director) $\vec{v} = (2,-1,7)$

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = -y+3 = \frac{z-4}{7}$$

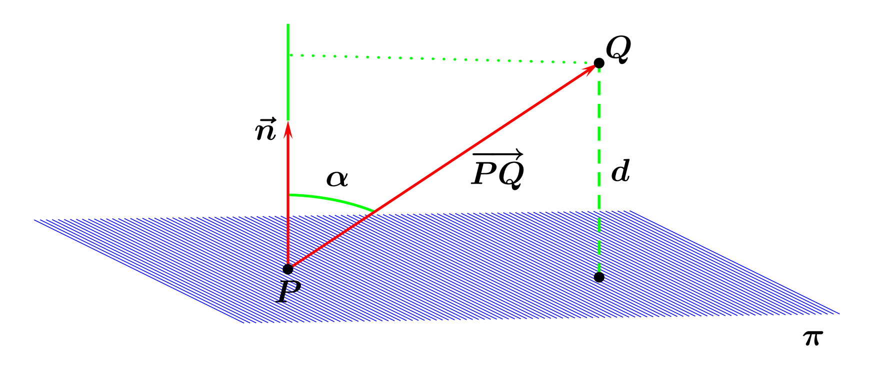
Entonces, como $\overrightarrow{PQ} = (2,-5,-1)$, obtenemos

$$\vec{v} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 7 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 36\vec{\imath} + 16\vec{\jmath} - 8\vec{k}$$

Por tanto

$$d(Q,r) = \frac{||\vec{v} \times \overrightarrow{PQ}||}{||\vec{v}||} = \frac{4\sqrt{101}}{3\sqrt{6}} \approx 5.47$$

Distancia de un punto a un plano
Sea un plano $\pi \equiv A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$ y sea un punto $Q = (x_0, y_0, z_0) \notin \pi$.



Entonces, la distancia entre el punto Q y el plano π, que denotamos por $d(Q,\pi)$, es:

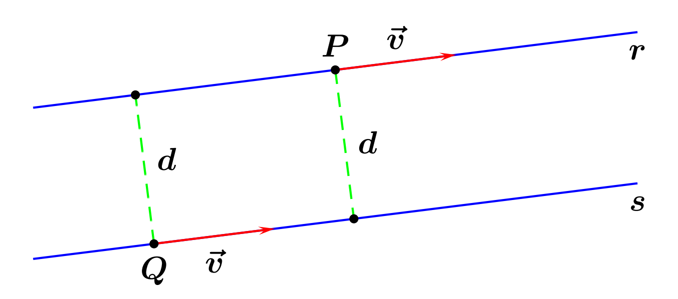
$$d(Q,\pi) = \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplo 2.4.20
Sean el punto $Q = (1,-1,2)$ y el plano $\pi \equiv 2x - 5y + 3z + 5 = 0$. Entonces, la distancia entre el punto Q y el plano π es

$$d(Q,\pi) = \frac{18}{\sqrt{38}} \approx 2.92$$

Distancia entre dos rectas paralelas
Sean dos rectas paralelas

$$r \equiv P + \lambda\,\vec{v}\,, \quad r \equiv Q + \mu\,\vec{v}\,,$$



Entonces, la distancia entre las rectas r y s, que denotamos por $d(r, s)$, es:

$$d(r, s) = d(P, s) = d(Q, r) = \frac{||\vec{v} \times \overrightarrow{PQ}||}{||\vec{v}||}$$

Ejemplo 2.4.21
Sean las rectas r y s del Ejemplo 2.4.7, las cuales, como ya vimos, son paralelas. La recta r está determinada por el punto $P = (-1, 5, -3)$ y el vector (director) $\vec{u} = (2, -1, 1)$; la recta s está determinada por el punto $Q = (5, 1, 1)$ y el vector (director) $\vec{u} = (2, -1, 1)$. Entonces, el vector $\overrightarrow{PQ} = (6, -4, 4)$ y así

$$\vec{v} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$$

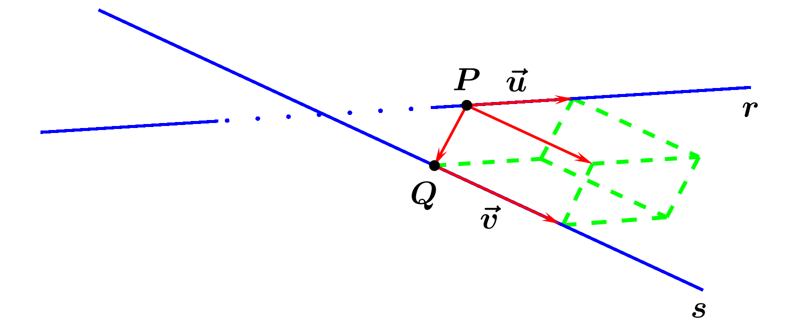
Por tanto

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{||\vec{v} \times \overrightarrow{PQ}||}{||\vec{v}||} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547$$

Distancia entre dos rectas que se cruzan
Sean dos rectas que se cruzan

$$r \equiv P + \lambda\,\vec{u}\,, \quad s \equiv Q + \mu\,\vec{v}$$

es decir, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente independientes.



Entonces

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right]\right|}{||\vec{u}\times\vec{v}||}$$

Ejemplo 2.4.22
Sean las rectas r y s del Ejemplo 2.4.9, las cuales, como ya vimos, se cruzan.
La recta r pasa por el punto $P=(1,-2,1)$ y tiene como vector director al vector $\vec{u}=(2,-1,0)$; la recta s está determinada por el punto $Q=(-3,2,-5)$ y el vector (director) $\vec{u}=(1,-2,3)$. Además, tal y como calculamos en el Ejemplo 2.4.9:

$$\left[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right]=6$$

Por otra parte

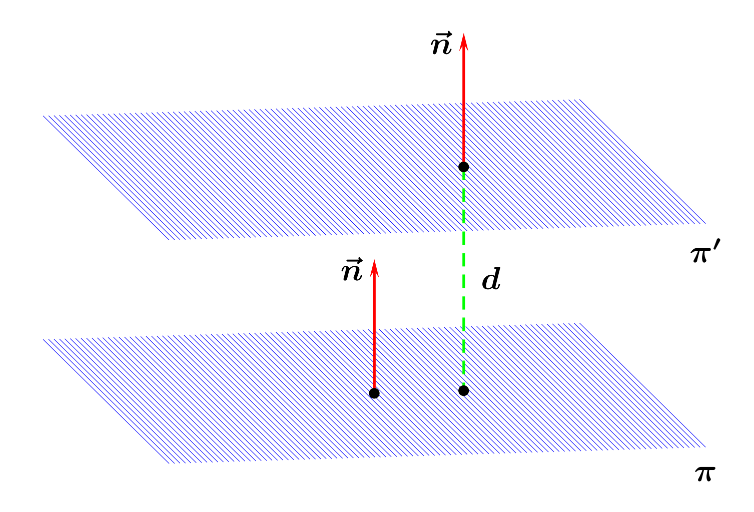
$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=-3\vec{\imath}-6\vec{\jmath}-3\vec{k}$$

Por tanto

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right]\right|}{||\vec{u}\times\vec{v}||}=\frac{6}{\sqrt{54}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\approx 0.816$$

Distancia entre dos planos paralelos
Sean dos planos paralelos

$$\pi\equiv A\,x+B\,y+C\,z+D=0\,,\quad \pi'\equiv A\,x+B\,y+C\,z+D'=0$$



Entonces

$$d(\pi,\pi')=\frac{|D'-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

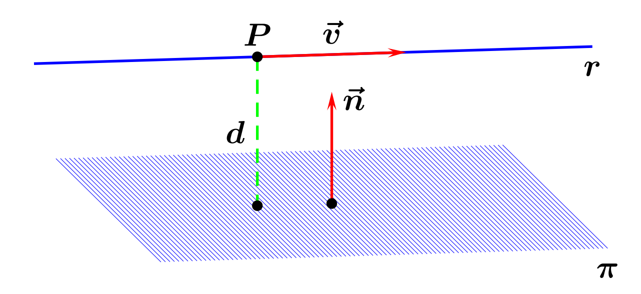
Ejemplo 2.4.23
Sean los planos del Ejemplo 2.4.11, los cuales, como ya indicamos, son paralelos. Entonces

$$d(\pi, \pi') = \frac{|4-(-2)|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+3^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.89$$

Distancia entre una recta y un plano paralelos
Sean una recta y un plano paralelos

$$r \equiv P + \lambda \vec{v}\,, \quad \pi \equiv A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$$

es decir, los vectores $\vec{n} = (A, B, C)$ y $\vec{v}$ son ortogonales.



Si $P = (x_0, y_0, z_0)$, entonces

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Ejemplo 2.4.24
Sean la recta r y el plano π del Ejemplo 2.4.14.
La recta r pasa por el punto $P = (3, -2, 4)$ y el plano π tiene como ecuación general: $x - y - z + 2 = 0$. Entonces

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|3+2-4+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1.73$$

Ejercicio 2.4.3
Dado el plano $3x + 4z + a = 0$ y la recta

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{b}$$

halla el valor de a y b de forma que la distancia de la recta al plano sea de 2 unidades.

Ejercicio 2.4.4
Determina la posición relativa entre las siguientes variedades lineales afines:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 11 \\ x & + & y & + & 3z & = & 8 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & \alpha & + & \beta \\ y & = & 1 & - & \alpha & + & 8\beta \\ z & = & 5 & - & \alpha & + & 5\beta \end{array}\right.$$

Si son paralelas, calcula la distancia entre ambas y si no lo son, calcula el ángulo que forman.

Ejercicio 2.4.5
Obtén la ecuación de un plano que dista 4 unidades del origen de coordenadas, es perpendicular a la recta $x = y = z$ y corta al eje OZ en un punto de cota negativa.

Ejercicio 2.4.6
Considera las rectas

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \end{array}\right. , \quad s \equiv \left\{\begin{array}{l} ax - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{array}\right.$$

¿Para qué valor del parámetro a se cortan las rectas r y s? Para dicho valor, calcula el punto de corte de ambas rectas y el ángulo que forman.

Tema 3

Espacios vectoriales

En este tema estudiamos el concepto de espacio vectorial, centrándonos en los espacios vectoriales reales de dimensión finita, y más concretamente en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. No obstante, creemos necesario introducir otras estructuras algebraicas, con el fin de situar los espacios vectoriales en el contexto adecuado.

3.1. Introducción

En este primer apartado vamos a formalizar algunos conceptos que ya hemos utilizado en los dos temas anteriores, como son las leyes de composición (operaciones) sobre un conjunto, las cuales nos permitirán introducir la estructura de cuerpo, con la que también hemos trabajado en el caso particular del cuerpo de los números reales.

3.1.1. Leyes de composición

Ley de composición interna
Sea A un conjunto no vacío. Una **ley de composición interna** sobre A es una aplicación de $A \times A$ en A; por tanto, a cada $(a, b) \in A \times A$ le hacemos corresponder un único elemento $c \in A$:

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ (a,b) & \longrightarrow & c \end{array}$$

Ejemplo 3.1.1
La suma de números naturales es una ley de composición interna sobre $\mathbb{N}$, ya que a cada par de números naturales (m, n) le hacemos corresponder el número natural $m + n$:

$$\begin{array}{rccc} + \, : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (m,n) & \longrightarrow & m+n \end{array}$$

Ejemplo 3.1.2
La resta de números naturales no es una ley de composición interna sobre $\mathbb{N}$, ya que, por ejemplo:

$$2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$$

En cambio, la resta de números enteros sí que es una ley de composición interna sobre $\mathbb{Z}$, ya que a cada $(m, n) \in \mathbb{Z}$ le hacemos corresponder el único número entero $m - n$:

$$\begin{aligned} - \, : \, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (m, n) &\longrightarrow m - n \end{aligned}$$

Ley de composición externa

Sean un conjunto no vacío A y otro conjunto no vacío K, al que llamaremos dominio de operadores. Una **ley de composición externa** sobre A con dominio de operadores K es una aplicación de $K \times A$ en A; por tanto, a cada $(k, a) \in K \times A$ le hacemos corresponder un único elemento $b \in A$:

$$\begin{aligned} K \times A &\longrightarrow A \\ (k, a) &\longrightarrow b \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.3

El producto de un número natural y un número entero es una ley de composición externa sobre $\mathbb{Z}$ con dominio de operadores $\mathbb{N}$, ya que a cada $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ le hacemos corresponder el número entero $m \cdot n$:

$$\begin{aligned} \cdot \, : \, \mathbb{N} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (m, n) &\longrightarrow m \cdot n \end{aligned}$$

En cambio, el producto de un número entero y un número natural no es una ley de composición externa sobre $\mathbb{N}$ con dominio de operadores $\mathbb{Z}$, ya que, por ejemplo:

$$-2 \cdot 3 = -6 \notin \mathbb{N}$$

Las leyes de composición, en ocasiones, también se llaman operaciones.

3.1.2. Estructuras algebraicas

Una **estructura algebraica** está formada por un conjunto en el que hay definidas ciertas operaciones cumpliendo unas determinadas propiedades.

Un **grupo** es una estructura algebraica formada por un conjunto G y una ley de composición interna

$$\begin{aligned} * \, : \, G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longrightarrow a * b \end{aligned}$$

cumpliendo las siguientes propiedades:

- Dados cualesquiera $a, b, c \in G$, se tiene que $a * (b * c) = (a * b) * c$.
  (Propiedad asociativa)
- Existe un $e \in G$ tal que, dado cualquier $a \in G$ se tiene que $a * e = a = e * a$.
  (Existencia de elemento neutro)

- Dado cualquier $a \in G$, existe un $a' \in G$ tal que $a * a' = e = a' * a$.

  (Existencia de elemento simétrico)

Un grupo es, por tanto, un par $(G; *)$, donde G es un conjunto y $*$ es una ley de composición interna sobre G cumpliendo las tres propiedades anteriores.

Ejercicio 3.1.1
Sea $(G; *)$ un grupo. Entonces:

- El elemento neutro $e \in G$ es único.
- Dado cualquier $a \in G$, se tiene que el elemento simétrico $a' \in G$ es único.

Un grupo $(G; *)$ se dice que es un **grupo abeliano** o **grupo conmutativo** si para cualesquiera $a, b \in G$ se tiene que

$$a * b = b * a \quad \text{(Propiedad conmutativa)}$$

Ejemplo 3.1.4
El conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$, con la suma tiene estructura de grupo abeliano, ya que la suma es asociativa y conmutativa, el elemento neutro es el número 0 y el elemento simétrico de $m \in \mathbb{Z}$ es $-m \in \mathbb{Z}$. Se denota por $(\mathbb{Z}; +)$.
Lo mismo sucede con el conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, y con el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$. Estos grupos se representan por $(\mathbb{Q}; +)$ y $(\mathbb{R}; +)$, respectivamente.
En cambio, el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$, con el producto no tiene estructura de grupo, ya que los únicos números enteros que tienen simétrico son el 1 y el -1. Evidentemente, el elemento neutro es el número 1.

Un **anillo** es una estructura algebraica formada por un conjunto A y dos leyes de composición interna sobre A: suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, cumpliendo las siguientes propiedades:

- $(A; +)$ es un grupo abeliano.
- Dados cualesquiera $a, b, c \in A$, se tiene que

  $$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \text{(Propiedad asociativa)}$$

- Dados cualesquiera $a, b, c \in A$, se tiene que

  $$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (b + c) \cdot a &= b \cdot a + c \cdot a \end{aligned}$$

  (Propiedades distributivas a izquierda y derecha, respectivamente, del producto respecto de la suma)

Un anillo es, por tanto, una terna $(A;+,\cdot)$, donde $(A;+)$ es un grupo abeliano, y el producto es una operación asociativa y distributiva respecto de la suma.

El elemento neutro de la suma se representa por el símbolo 0 (no confundir con el número 0) y el elemento simétrico de $a \in A$ (respecto de la suma) se representa por $-a$ y se llama elemento opuesto de a.

Un anillo se dice que es un **anillo unitario** si el producto tiene elemento neutro. En este caso, el elemento neutro del producto también es único; se denota por el símbolo 1 (no confundir con el número 1).

Además, se dice que un anillo es un **anillo conmutativo** si el producto es conmutativo.

Ejercicio 3.1.2
Sea $(A;+,\cdot)$ un anillo. Entonces:

- Para cualquier $a \in A$, se tiene que
$$a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$$
- Para cualesquiera $a, b \in A$, se tiene que
$$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$
- Para cualesquiera $a, b \in A$, se tiene que
$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

Ejemplo 3.1.5
Los conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son, con las operaciones suma y producto usuales, anillos unitarios y conmutativos, ya que como hemos visto en el Ejemplo 3.1.4 estos conjuntos con la suma tienen estructura de grupo y, además, el producto tiene elemento neutro (el número 1), es asociativo, es conmutativo y se cumple la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.
Se representan por $(\mathbb{Z};+,\cdot)$, $(\mathbb{Q};+,\cdot)$ y $(\mathbb{R};+,\cdot)$, respectivamente.

Un anillo $(K;+,\cdot)$ se dice que es un **cuerpo** si

- $(K;+,\cdot)$ es un anillo unitario y conmutativo.
- Para cualquier $a \in K$, $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in K$ tal que
$$a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$$
El elemento a^{-1} es el elemento simétrico de a respecto del producto y se llama inverso del elemento a. Al igual que sucedía con la suma, el elemento inverso a^{-1} de un elemento $a \in K$ es único.

Los elementos de un cuerpo se suelen llamar escalares.

Ejemplo 3.1.6
Los conjuntos numéricos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son, con las operaciones suma y producto, cuerpos conmutativos, ya que como hemos visto en el Ejemplo 3.1.5 estos conjuntos tienen estructura de anillo unitario y conmutativo y, además, todo número racional (real) no nulo tiene inverso.
En cambio el anillo $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ no es un cuerpo, ya que como hemos visto en el Ejemplo 3.1.4 los únicos número enteros que tienen inverso son el 1 y el -1.

Ejemplo 3.1.7
En el conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}\ ,\ \ y \in \mathbb{R}\}$$

se consideran las operaciones

$$\begin{array}{rl} \text{Suma}: & (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \\ \text{Producto}: & (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \end{array}$$

Veamos que con estas dos operaciones el conjunto $\mathbb{R}^2$ tiene estructura de cuerpo; se denota por $\mathbb{C}$ y se llama el cuerpo de los números complejos. Los elementos de $\mathbb{C}$ se llaman **números complejos**.

Es fácil comprobar que la suma y el producto de números complejos es asociativa y conmutativa. El elemento neutro de la suma es $(0, 0)$ y el elemento neutro del producto es $(1, 0)$. El elemento opuesto de (a, b) es $(-a, -b)$ y elemento inverso de $(a, b) \neq (0, 0)$ es

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

Si identificamos el conjunto $\mathbb{R} \times \{0\}$ con $\mathbb{R}$, podemos considerar el conjunto de los números reales como un subconjunto del conjunto de los números complejos. De esta forma identificamos el elemento $(a, 0)$ con el número real a. Además, si denotamos el número complejo $(0, b)$ como $b\,i$, podemos representar todo número complejo en forma binómica:

$$(a, b) = a + b\,i$$

El número real a se llama **parte real** del número complejo $a + b\,i$, y el número real b se llama **parte imaginaria** del número complejo $a + b\,i$.
De esta forma $i = (0, 1)$ y así

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

es decir, i es una raíz de la ecuación $z^2 + 1 = 0$; la otra raíz es $-i$.

El concepto de matriz que hemos visto en el Tema 1 (matriz real) se puede generalizar a cualquier cuerpo K (cuando no hay confusión se suelen omitir las operaciones a la hora de designar un cuerpo).

Así, dado un cuerpo $(K;+,\cdot)$, llamamos matriz de tamaño $m\times n$ sobre el cuerpo K a una colección de $m\cdot n$ escalares, que representamos en una tabla rectangular de m filas y n columnas

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $a_{ij}\in K$, con $i=1,2,\ldots,m$, y $j=1,2,\ldots,n$.

El conjunto de todas las matrices de tamaño $m\times n$ sobre el cuerpo K lo representamos por $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

Todos los conceptos introducidos en el Tema 1, los cuales se definieron para el cuerpo de los números reales, se pueden generalizar cuando K es un cuerpo arbitrario.

Evidentemente, algunos de esos conceptos requieren de unas definiciones más precisas como, por ejemplo, la noción de determinante de una matriz.

Ejemplo 3.1.8

El conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ con la operación suma de matrices, tiene estructura de grupo conmutativo, ya que la suma de matrices es una ley de composición interna, es asociativa, tiene elemento neutro (la matriz nula), toda matriz tiene elemento simétrico (su matriz opuesta) y la suma de matrices es conmutativa.
Se representa por $(\mathcal{M}_{m\times n}(K);+)$.

El conjunto de todas las matrices de tamaño $n\times n$ sobre el cuerpo K lo representamos por $\mathcal{M}_n(K)$.

Ejemplo 3.1.9

El conjunto $\mathcal{M}_n(K)$ con las operaciones suma y producto de matrices, tiene estructura de anillo unitario, ya que como hemos visto en el Ejemplo 3.1.8 el conjunto $\mathcal{M}_n(K)$ con la suma de matrices tiene estructura de grupo conmutativo; además, el producto de matrices es asociativo, tiene elemento neutro (la matriz identidad) y se cumple la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Por lo tanto, el conjunto $\mathcal{M}_n(K)$, con las operaciones suma y producto de matrices, tiene estructura de anillo unitario. Se representa por $(\mathcal{M}_n(K);+,\cdot)$.
En cambio, no tiene estructura de cuerpo porque sólo las matrices que tienen determinante distinto de cero (elemento neutro de la suma en K) tienen inversa.

Consideremos un cuerpo K y $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, y sean $a_0,a_1,\ldots,a_n\in K$, con $a_n\neq 0$. Decimos que la aplicación

$$\begin{aligned} p:\ K &\longrightarrow K \\ x &\longrightarrow p(x)=a_0+a_1\,x+\cdots+a_n\,x^n \end{aligned}$$

es un polinomio de grado n en la indeterminada x con coeficientes en el cuerpo K; se dice que los escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los coeficientes del polinomio p.

Utilizamos la notación $x^2 = x\,x$, $x^3 = xxx, \ldots$

El conjunto de todos los polinomios con coeficientes en el cuerpo K se denota por $K[x]$.

Ejemplo 3.1.10
La aplicación $p(x) = x^3 - 2x + 3$ es un polinomio de grado 3 con coeficientes en el cuerpo de los números reales (racionales).
Evidentemente

$$p(x) = 1x^3 + 0x^2 + (-2)x + 3$$

Un polinomio $p \in K[x]$ se dice que es un monomio si es de la forma

$$p(x) = ax^n$$

donde el escalar $a \in K$, $a \neq 0$, se llama coeficiente del monomio y el número n se llama grado del monomio.

Ejemplo 3.1.11
El polinomio $p(x) = 4x^3$ con coeficientes en el cuerpo de los números reales (racionales) es un monomio de grado 3.

En el conjunto $K[x]$ se puede definir una ley de composición interna

$$\begin{array}{rcl} + \,:\, K[x] \times K[x] & \longrightarrow & K[x] \\ (p, q) & \longrightarrow & p + q \end{array}$$

donde

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x)$$

Ejercicio 3.1.3
Sea K un cuerpo. Demuestra que $(K[x]; +)$ es un grupo conmutativo.

En el conjunto $K[x]$ se puede definir otra ley de composición interna

$$\begin{array}{rcl} \cdot \,:\, K[x] \times K[x] & \longrightarrow & K[x] \\ (p, q) & \longrightarrow & p \cdot q \end{array}$$

donde

$$(p \cdot q)(x) = p(x)\, q(x)$$

Ejercicio 3.1.4
Sea K un cuerpo. Demuestra que $(K[x]; +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y unitario.

Es evidente que $K[x]$ no tiene estructura de cuerpo; el monomio $p(x) = x$ no tiene inverso, ya que $f(x) = 1/x$, que es una aplicación definida en $K - \{0\}$, no es un polinomio y es la única aplicación que cumple:

$$p(x)\, f(x) = 1\;, \quad x \neq 0$$

3.2. Espacios vectoriales. El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

En el Tema 1 hemos hablado de vectores al referirnos a la solución o soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. En esta sección vamos a introducir formalmente el concepto de espacio vectorial para después particularizarlo al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

3.2.1. Definición de espacio vectorial

Definición 3.2.1 (Espacio vectorial)
Sea E un conjunto no vacío y sea K un cuerpo. Se dice que el conjunto E tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo K si, y sólo, si

1. Existe una ley de composición interna, $(+)$, sobre E tal que $(E;+)$ es un grupo conmutativo.

   El elemento neutro lo representamos por $\vec{0}$ y lo llamamos vector nulo; dado cualquier $\vec{u} \in E$, al elemento opuesto de $\vec{u}$ lo representamos por $-\vec{u}$.

   A esta operación la llamamos **suma**.

2. Existe una ley de composición externa, $(\cdot)$, sobre E con dominio de operadores K

   $$\begin{aligned} \cdot :\ K \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, \vec{u}) &\longrightarrow \lambda \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

   cumpliendo las siguientes propiedades

   a) $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v},\ \forall \lambda \in K,\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in E.$

   b) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u},\ \forall \lambda, \mu \in K,\ \forall \vec{u} \in E.$

   c) $(\lambda\, \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}),\ \forall \lambda, \mu \in K,\ \forall \vec{u} \in E.$

   d) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u},\ \forall \vec{u} \in E.$

   A esta operación la llamamos **producto por un escalar**.

Los elementos de E se llaman vectores y los elementos de K se llaman, como indicamos anteriormente, escalares.

Un espacio vectorial es, por tanto, una terna $[(E;+), (K;+,\cdot), \cdot]$ donde $(E;+)$ es un grupo conmutativo, $(K;+,\cdot)$ es un cuerpo y $(\cdot)$ es una ley de composición externa sobre E con dominio de operadores K, verificando las propiedades anteriores. Para simplificar se suele decir que E es un espacio vectorial sobre un cuerpo K o que E es un K-espacio vectorial.

Hay que hacer notar aquí hemos designado con el mismo símbolo, $(+)$, la suma de escalares y la suma de vectores, y con el mismo símbolo, $(\cdot)$, el producto de escalares y la ley de composición externa (producto de un escalar y un vector).

Ejemplo 3.2.1
Todo cuerpo es un espacio vectorial sobre él mismo. Para ello basta tomar como ley de composición externa el producto de escalares.
En particular, el cuerpo de los números reales, $\mathbb{R}$, y el cuerpo de los números complejos, $\mathbb{C}$, tienen estructura de espacio vectorial, el primero sobre el cuerpo de los números reales y el segundo sobre el cuerpo de los números complejos (y sobre el cuerpo de los números reales).

Ejemplo 3.2.2
El conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo K, ya que, como hemos visto en el Ejemplo 3.1.8, $(\mathcal{M}_{m\times n}(K);+)$ es un grupo conmutativo y, además, el producto de un escalar y una matriz es una ley de composición externa sobre $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ con dominio de operadores K, que cumple las propiedades:

(*a*) $\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B,\ \forall\lambda\in K,\ \forall A,B\in M_{m\times n}(K).$

(*b*) $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A,\ \forall\lambda,\mu\in K,\ \forall A\in M_{m\times n}(K).$

(*c*) $(\lambda\,\mu)\cdot A=\lambda\cdot(\mu\cdot A),\ \forall\lambda,\mu\in K,\ \forall A\in M_{m\times n}(K).$

(*d*) $1\cdot A=A,\ \forall A\in M_{m\times n}(K).$

En el conjunto de los polinomios con coeficientes en un cuerpo K, $K[x]$, se puede definir una ley de composición externa con dominio de operadores K

$$\begin{aligned} \cdot : K\times K[x] &\longrightarrow K[x]\\ (\lambda,p) &\longrightarrow \lambda\cdot p \end{aligned}$$

donde

$$(\lambda\cdot p)(x)=\lambda\,p(x)$$

Ejercicio 3.2.1
Dado un cuerpo K, demuestra que $K[x]$ tiene estructura de K-espacio vectorial.

Ejercicio 3.2.2
Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Entonces, para cualesquiera que sean los vectores $\vec{u},\vec{v}\in E$ y los escalares $\lambda,\mu\in K$ se verifica:

(*a*) $0\cdot\vec{u}=\vec{0}.$

(*b*) $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}.$

(*c*) Si $\lambda\cdot\vec{u}=\vec{0}$, entonces $\lambda=0$ ó $\vec{u}=\vec{0}$.

3.2.2. El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Recordemos que en el Apartado 2.2.1 introdujimos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Ahora vamos a formalizar esta estructura algebraica y, a su vez, esta formalización nos servirá para afianzar el concepto de espacio vectorial.

Consideremos el conjunto (no vacío)

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

y el cuerpo de los números reales, $\mathbb{R}$.

En el conjunto $\mathbb{R}^2$ se puede definir la ley de composición interna

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((u_1, u_2), (v_1, v_2)) &\longrightarrow (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \end{aligned}$$

la cual, evidentemente, dota a $\mathbb{R}^2$ de estructura de grupo conmutativo.

Además, podemos definir la ley de composición externa sobre $\mathbb{R}^2$ con dominio de operadores $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda\,, (u, v)) &\longrightarrow (\lambda\, u, \lambda\, v) \end{aligned}$$

la cual, evidentemente, junto con la ley de composición interna anterior, dota a $\mathbb{R}^2$ de estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3.2.3
Demuestra que $\mathbb{R}^2$, con las dos operaciones anteriores, tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

Análogamente, dado el conjunto (no vacío)

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

y el cuerpo de los números reales, $\mathbb{R}$, podemos definir una ley de composición interna sobre $\mathbb{R}^3$ y una ley de composición externa sobre $\mathbb{R}^3$ con dominio de operadores $\mathbb{R}$, generalizando las operaciones anteriores definidas en $\mathbb{R}^2$, dotando a $\mathbb{R}^3$ de estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3.2.4
Demuestra que $\mathbb{R}^3$, con las dos operaciones anteriores, tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

En general,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\ ,\ \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

con la ley de composición interna

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

y la ley de composición externa con dominio de operadores $\mathbb{R}$

$$\lambda \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n) = (\lambda\, u_1, \lambda\, u_2, \ldots, \lambda\, u_n)$$

tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

Ejercicio 3.2.5
Demuestra que $\mathbb{R}^n$, con las dos operaciones anteriores, tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

Notar que si K es un cuerpo, entonces al conjunto

$$K^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in K\ ,\ \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

se le puede dotar de estructura de K-espacio vectorial de forma análoga a $\mathbb{R}^n$.

3.3. Subespacios vectoriales

Consideremos un espacio vectorial E sobre un cuerpo K y un subconjunto no vacío S de E ($S \subseteq E$). Queremos determinar qué condiciones debe cumplir el subconjunto S para que con las operaciones definidas en E, el subconjunto S tenga estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo K. En tal caso, diremos que el subconjunto S es un subespacio vectorial de E.

3.3.1. Definición de subespacio vectorial

Definición 3.3.1 (Subespacio vectorial)
Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $S \subseteq E$, $S \neq \emptyset$.
Decimos que S es un **subespacio vectorial** de E si S es, con las mismas operaciones de E, un espacio vectorial sobre K.

Teorema 3.3.1 (Caracterización de subespacio vectorial)
Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $S \subseteq E$, $S \neq \emptyset$.
S es un subespacio vectorial de E si, y sólo si, dados cualesquiera $\vec{u}, \vec{v} \in S$ y cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \in S$.

Ejemplo 3.3.1
Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y veamos que el plano

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 4y + z = 0\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Para ello tomamos cualquier par de vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de S y cualquier par de escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, y calculamos la combinación lineal:

$$\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = (\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2, \lambda u_3 + \mu v_3)$$

Pero los vectores $\vec{u}, \vec{v} \in S$, por tanto

$$u_1 - 4u_2 + u_3 = 0 \ , \quad v_1 - 4v_2 + v_3 = 0$$

De aquí

$$\lambda u_1 + \mu v_1 - 4(\lambda u_2 + \mu v_2) + \lambda u_3 + \mu v_3 =$$
$$\lambda(u_1 - 4u_2 + u_3) + \mu(v_1 - 4v_2 + v_3) = 0$$

Entonces

$$\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \in S$$

y así demostramos que el plano S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 3.3.1
Sea K un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y

$$K_n[x] = \{a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n : a_i \in K \ , \ \ i = 0, 1, \ldots, n\}$$

el conjunto de polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en el cuerpo K. Demuestra que $K_n[x]$ es un subespacio vectorial de $K[x]$.

Un espacio vectorial E tiene como subespacios vectoriales al propio espacio vectorial E y al conjunto formado por el vector nulo, $\{\vec{0}\}$. Tales subespacios se llaman **subespacios impropios** de E. Los **subespacios propios** de E son los subespacios vectoriales de E distintos de E y $\{\vec{0}\}$.

Ejemplo 3.3.2
Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y veamos que el plano

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 4y + z = 3\}$$

no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Elegimos los vectores $\vec{u} = (1, 0, 2)$ y $\vec{v} = (0, 0, 3)$ de S, y los escalares $\lambda = 1$ y $\mu = 1$. Entonces

$$\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = 1 \cdot (1, 0, 2) + 1 \cdot (0, 0, 3) = (1, 0, 5) \notin S$$

por tanto, el plano S no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Como veremos más adelante, los únicos subespacios propios de $\mathbb{R}^3$ son las rectas y los planos que pasan por el origen. También comprobaremos que, en general, los únicos subespacios propios de $\mathbb{R}^n$ son los correspondientes a las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con n incógnitas homogéneos compatibles indeterminados.

3.3.2. Suma e intersección de subespacios

Teorema 3.3.2 (Suma de subespacios)
Sean S, T dos subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial E.
Llamamos **suma** de S y T al conjunto

$$S + T = \{\vec{u} + \vec{v} : \vec{u} \in S \ , \ \ \vec{v} \in T\}$$

La suma de S y T es un subespacio vectorial de E.

Ejercicio 3.3.2
Demuestra el Teorema 3.3.2.

Teorema 3.3.3 (Intersección de subespacios)
Sean S, T dos subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial E.
La **intersección** de S y T

$$S \cap T = \{\vec{u} \in E : \vec{u} \in S \ , \ \ \vec{u} \in T\}$$

es un subespacio vectorial de E.

Ejercicio 3.3.3
Demuestra el Teorema 3.3.3.

En general, la unión de subespacios vectoriales no es un subespacio vectorial.

Ejemplo 3.3.3
Sean los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\} \ , \quad T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0\}$$

Veamos que la unión de S y T, $S \cup T$, no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
Para ello consideramos los vectores

$$\vec{u} = (1, 1, 0) \in S \subset S \cup T \ , \quad \vec{v} = (1, 0, -1) \in T \subset S \cup T$$

y los escalares $\lambda = 1$ y $\mu = 1$. Entonces

$$\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = 1 \cdot (1, 1, 0) + 1 \cdot (1, 0, -1) = (2, 1, -1) \notin S \cup T$$

ya que $(2, 1, -1) \notin S$ y $(2, 1, -1) \notin T$.

Definición 3.3.2 (Suma directa)
Sean S, T dos subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial E.
Decimos que la suma de S y T es directa, y lo denotamos por $S \oplus T$, si cada vector de $S + T$ se puede expresar de forma única como la suma de un vector de S y un vector de T.

Teorema 3.3.4 (Caracterización de suma directa)
Sean S, T dos subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial E.
La suma de S y T es directa si, y sólo si, $S \cap T = \{\vec{0}\}$.

Ejemplo 3.3.4
Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = t\} \\ T &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y = 2x \ , \ \ t = 2z\} \end{aligned}$$

veamos que la suma de S y T es directa.
La intersección de S y T es

$$S \cap T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = t \ , \ \ y = 2x \ , \ \ t = 2z\}$$

es decir, sus vectores son solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ x & - & z & = & 0 \\ x & - & t & = & 0 \\ 2x & - & y & = & 0 \\ 2z & - & t & = & 0 \end{array} \right.$$

Escalonando la matriz de coeficientes del sistema, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir, el sistema anterior es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ y & - & z & = & 0 \\ z & - & t & = & 0 \\ & & t & = & 0 \end{array} \right.$$

el cual, tiene como única solución $t = 0$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, esto es, la solución trivial $(0, 0, 0, 0)$. Por tanto

$$S \cap T = \{(0, 0, 0, 0)\}$$

es decir, la suma de S y T es directa.

3.4. Dependencia e independencia lineal. Sistema generador de un subespacio

En este apartado introducimos el concepto de sistema de vectores y los clasificamos en sistemas libres y sistemas ligados. Además, mediante la combinación lineal de vectores, podemos definir la noción de subespacio vectorial generado por un sistema de vectores, que será una de las dos formas en la que expresaremos un subespacio vectorial.

3.4.1. Dependencia e independencia lineal

Definición 3.4.1 (Sistema de vectores)
Un **sistema de vectores** de un K-espacio vectorial E es una colección de vectores de E, los cuales se pueden repetir.

Ejemplo 3.4.1
En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, el conjunto $S = \{(1, -1, 0), (-2, 3, 1)\}$ es un sistema de vectores de $\mathbb{R}^3$.
En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$, el conjunto de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \right\}$$

es un sistema de vectores de $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$.

Definición 3.4.2 (Combinación lineal)
Sea E un K-espacio vectorial. Dado un vector $\vec{u} \in E$, diremos que $\vec{u}$ es **combinación lineal** del sistema de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ (combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$), si existen n escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tales que

$$\vec{u} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n$$

Los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ se llaman **coeficientes de la combinación lineal**.

Ejemplo 3.4.2
En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, el vector $(-1, 5, 0)$ es combinación lineal de los vectores del sistema

$$S = \{(1, 1, -1), (2, 0, 1), (0, 2, 1)\}$$

ya que

$$(-1, 5, 0) = 1 \cdot (1, 1, -1) + (-1) \cdot (2, 0, 1) + 2 \cdot (0, 2, 1)$$

y, por lo tanto, los coeficientes de la combinación lineal son 1, -1 y 2.

Notar aquí que la Definición 3.4.2 generaliza el concepto de combinación lineal de líneas de una matriz utilizado en el apartado 1.3.2 al considerar, por ejemplo, las filas de una matriz de tamaño 4×3 como 4 vectores de $\mathbb{R}^3$.

Definición 3.4.3 (Sistema ligado)
En un K-espacio vectorial E, un sistema de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es **ligado** (sus vectores son **linealmente dependientes**), si existen n escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, no todos nulos, tales que

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$$

Si S es un sistema formado por un número infinito de vectores, se dice que el sistema S es ligado si S tiene un subconjunto finito de vectores ligado.

Ejemplo 3.4.3
En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, el sistema de vectores

$$S = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

es ligado porque

$$1 \cdot (1, 1, 1) + (-1) \cdot (1, 0, 1) + (-1) \cdot (0, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

Este ejemplo nos muestra que cuando un sistema es ligado, un vector del sistema siempre se puede poner como combinación lineal del resto de vectores del sistema; en este caso

$$(1, 1, 1) = (1, 0, 1) + (0, 1, 0) = 1 \cdot (1, 0, 1) + 1 \cdot (0, 1, 0)$$

Ejercicio 3.4.1
Sean E un K-espacio vectorial S un sistema de vectores de E. Si $\vec{0} \in S$, entonces el sistema S es ligado.

Definición 3.4.4 (Sistema libre)
En un K-espacio vectorial E, un sistema de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es **libre** (sus vectores son **linealmente independientes**), si cualquier combinación lineal igualada al vector nulo

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$$

implica necesariamente que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Si S es un sistema formado por un número infinito de vectores, se dice que el sistema S es libre si todo subconjunto finito de S es libre.

Ejemplo 3.4.4
En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, el sistema de vectores

$$S = \{(1, 1, -1), (2, 0, 1), (0, 2, 1)\}$$

es libre, ya que si consideramos cualquier combinación lineal de los vectores del sistema S igualada al vector nulo

$$\lambda \cdot (1,1,-1) + \mu \cdot (2,0,1) + \nu \cdot (0,2,1) = (0,0,0)$$

obtenemos que los coeficientes de la combinación lineal son solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda & + & 2\mu & & & = & 0 \\ \lambda & + & & + & 2\nu & = & 0 \\ -\lambda & + & \mu & + & \nu & = & 0 \end{array}\right.$$

La matriz de coeficientes de este sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que la columnas de esta matriz corresponden a las componentes de los vectores del sistema S.
Es fácil comprobar que la matriz A tiene rango igual a 3, por lo tanto, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, la única solución del sistema de ecuaciones lineales anterior es la solución trivial $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$. De aquí, el sistema S es libre.

Ejercicio 3.4.2
En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, determina si los siguientes sistemas de vectores son libres o ligados:

(*a*) $S = \{(1,-1,1,-1),(2,-1,3,4),(3,-2,4,3)\}$.

(*b*) $T = \{(1,3,2,-1),(0,1,-2,1),(-1,7,-2,-4),(1,0,0,1)\}$.

Al resolver este ejercicio tomando como base el Ejemplo 3.4.4, se puede inferir que un sistema formado por m vectores en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es libre si, y sólo si, al poner esos vectores como filas o columnas de una matriz (de tamaño $m \times n$ o de tamaño $n \times m$), esa matriz tiene rango m. Por tanto, en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ todo sistema formado por más de n vectores es ligado; esta consecuencia será enunciada en general cuando introduzcamos los espacios vectoriales de tipo finito.

Ejercicio 3.4.3
Sea K un cuerpo. Demuestra que el sistema de vectores

$$S = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$$

del espacio vectorial $K[x]$ es un sistema libre.

Ejemplo 3.4.5
El sistema de vectores de $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{C} = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$$

es un sistema libre, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Es evidente que este sistema de vectores está formado por n vectores.

Definición 3.4.5 (Rango de un sistema de vectores)
Se llama **rango** de un sistema de vectores al número máximo de vectores linealmente independientes del sistema.

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, el rango de un sistema de vectores coincide con el rango de la matriz que se obtiene al poner esos vectores como filas o columnas.

Ejemplo 3.4.6
El rango del sistema de vectores

$$S = \{(1,-1,2,3),(2,1,0,-1),(3,0,2,2)\}$$

es igual a 2, ya que

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.4.4
Calcula el rango de los siguientes sistemas de vectores

(*a*) $\{(1,1,-1),(2,0,1),(0,2,1)\}$

(*b*) $\{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,0)\}$

(*c*) $\{3,1,4),(2,-1,1),(-5,3,2)\}$

(*d*) $\{(1,3,2),(5,4,-1),(-3,0,3)\}$

(*e*) $\{(1,-1,1,-1),(2,-1,3,4),(3,-2,4,3)\}$

(*f*) $\{(1,3,2,-1),(0,1,-2,1),(-1,7,-2,-4),(1,0,0,1)\}$

3.4.2. Sistema generador de un subespacio

Teorema 3.4.1 (Subespacio generado por un sistema de vectores)
Sea E un K-espacio vectorial. Dado un sistema de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, el conjunto de combinaciones lineales que se pueden hacer con los vectores de S es un subespacio vectorial de E, que denotamos por $\langle S \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \rangle$ y que llamamos **subespacio generado** por S, es decir

$$\langle S \rangle = \{\lambda_1\, \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\, \vec{v}_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\}$$

Si S es un sistema formado por un número infinito de vectores, el subespacio generado por S es

$$\langle S \rangle = \{\lambda_1\, \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\, \vec{v}_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\ ,\ \ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in S, n \in \mathbb{N}\}$$

Además, $\langle S \rangle$ es el menor subespacio vectorial que contiene a S.

Ejercicio 3.4.5
Demuestra el Teorema 3.4.1.

Definición 3.4.6 (Sistema generador de un subespacio)
Decimos que un sistema de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de un K-espacio vectorial E es un **sistema generador** de un subespacio vectorial S de E, si

$$S = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \rangle$$

Si T es un sistema formado por un número infinito de vectores de E, decimos que T es un sistema generador de un subespacio vectorial S de E si $S = \langle T \rangle$.

Ejemplo 3.4.7
Veamos que el sistema de vectores $S = \{(1, 2, -1), (-1, 0, 2), (1, 2, 1)\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$.

Por la Definición 3.4.6 hemos de demostrar que $\mathbb{R}^3 = \langle S \rangle$.
Esta igualdad entre estos dos conjuntos la vamos a comprobar viendo que un conjunto es un subconjunto del otro conjunto y viceversa:

$\boxed{\subseteq}$ Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Queremos probar que $(x, y, z) \in \langle S \rangle$. Pero $(x, y, z) \in \langle S \rangle$ si, y sólo si, existen tres escalares $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x, y, z) = \lambda \cdot (1, 2, -1) + \mu \cdot (-1, 0, 2) + \nu \cdot (1, 2, 1)$$

Entonces, $(x, y, z) \in \langle S \rangle$ si, y sólo si, el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & - & \mu & + & \nu & = & x \\ 2\lambda & & & + & 2\nu & = & y \\ -\lambda & + & 2\mu & + & \nu & = & z \end{array}\right.$$

es compatible. Pero el determinante de la matriz de coeficientes de este sistema es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema anterior es compatible determinado. Su única solución es

$$\lambda = -x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}z \,, \quad \mu = -x + \frac{1}{2}y \,, \quad \nu = x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z$$

Por tanto, $\mathbb{R}^3 \subseteq \langle S \rangle$.

$\boxed{\supseteq}$ Sea $(x, y, z) \in \langle S \rangle$. Entonces, existen $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= \lambda \cdot (1, 2, -1) + \mu \cdot (-1, 0, 2) + \nu \cdot (1, 2, 1) \\ &= (\lambda - \mu + \nu, 2\lambda + 2\nu, -\lambda + 2\mu + \nu) \in \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

es decir, $\langle S \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 3.4.6
Demuestra que el sistema de vectores

$$\mathcal{C} = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}$$

es un sistema generador de $\mathbb{R}^n$, viéndolo primero para $n = 2$ y $n = 3$, y después en general para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3.4.7
Demuestra que

$$\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) = \langle A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \rangle$$

donde

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general, se puede demostrar que

$$S = \{A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n}, A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2n}, \ldots, A_{m1}, A_{m2}, \ldots, A_{mn}\}$$

donde A_{ij} es la matriz de tamaño $m \times n$, tal que tiene todos sus elementos nulos salvo el que ocupa el lugar ij que es igual a 1, es un sistema generador del espacio vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

En el ejercicio anterior, el cuerpo de los números reales se puede sustituir por un cuerpo arbitrario K.

Ejercicio 3.4.8
Sea K un cuerpo. Demuestra que el sistema de vectores

$$S = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$$

es un sistema generador del espacio vectorial $K[x]$.

Ejercicio 3.4.9
Sean E un K-espacio vectorial y

$$S = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m \rangle \ , \quad T = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \rangle$$

donde $\vec{u}_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots, m$, y $\vec{v}_j \in E$, $j = 1, 2, \ldots, n$.
Entonces

$$S + T = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \rangle$$

Teorema 3.4.2
Sean E un K-espacio vectorial y $S = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \rangle$ el subespacio generado por los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\ldots$, $\vec{v}_n$ de E. Si el vector $\vec{v}_i$, para algún $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, es combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n$, entonces

$$S = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n \rangle$$

Ejemplo 3.4.8
El subespacio generado por el sistema de vectores dado en el Ejemplo 3.4.6 es

$$\langle S \rangle = \langle (1, -1, 2, 3), (2, 1, 0, -1) \rangle$$

ya que al calcular el rango en el Ejemplo 3.4.6 se puede comprobar también que el tercer vector del sistema S, $(3, 0, 2, 2)$, es combinación lineal de los otros dos.
Además

$$\langle S \rangle = \langle (1, -1, 2, 3), (0, -3, 4, 7) \rangle$$

3.5. Bases y dimensión. Cambios de base

El concepto de base es uno de los más importantes dentro de la estructura de espacio vectorial. Aquí sólo vamos a considerar espacios vectoriales de dimensión finita, los cuales son los más comunes en Ingeniería.

3.5.1. Bases y dimensión

Definición 3.5.1 (Espacio vectorial de tipo finito)
Un espacio vectorial es de **tipo finito**, si admite un sistema generador con un número finito de vectores.

Ejemplo 3.5.1
El espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ es, como hemos visto en el Ejemplo 3.4.4, de tipo finito.

Ejercicio 3.5.1
Demuestra que el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es de tipo finito.

Ejemplo 3.5.2
El espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial de tipo finito, como consecuencia del Ejercicio 3.4.6.
En general, y como consecuencia de la observación posterior al Ejercicio 3.4.6, el espacio vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es de tipo finito.

Ejercicio 3.5.2
Sea K un cuerpo. Demuestra que el espacio vectorial $K[x]$ no es de tipo finito.

A partir de aquí, salvo que indiquemos lo contrario, sólo consideraremos espacios vectoriales de tipo finito.

Definición 3.5.2 (Base de un espacio vectorial)
Un sistema de vectores de un K-espacio vectorial E se dice que es una **base** de E, si es un sistema libre y generador de E.

Teorema 3.5.1 (Existencia de base)
Todo K-espacio vectorial E de tipo finito, $E \neq \{\vec{0}\}$, admite una base formada por un número finito de vectores.
En general, todo K-espacio vectorial E , $E \neq \{\vec{0}\}$, admite una base.

Ejemplo 3.5.3
Como consecuencia del Ejemplo 3.4.5 y del Ejercicio 3.4.6, el sistema de vectores

$$\mathcal{C} = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}$$

es una base de $\mathbb{R}^n$.
Esta base de $\mathbb{R}^n$ se llama **base canónica** de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 3.5.3
Comprueba que el sistema de vectores

$$B = \{(2, -1, 3), (1, 4, 0), (3, 2, -1)\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3.5.2 (Caracterización de base)
Sea E un K-espacio vectorial y B un sistema de vectores de E.
B es una base de E si, y sólo si, todo vector de E se puede expresar de forma única como combinación lineal de vectores de B.

Ejercicio 3.5.4
Demuestra el Teorema 3.5.2.

Definición 3.5.3
Sean E un K-espacio vectorial, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ una base de E y $\vec{v} \in E$. Entonces, en virtud del Teorema 3.5.2, existen n únicos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n$$

Estos n únicos escalares se llaman **coordenadas** del vector $\vec{v}$ en la base B.
En ocasiones las coordenadas se suelen escribir como un vector de K^n. Entonces decimos que $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ son las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base B.

Nótese que la definición anterior requiere que cuando se consideren las coordenadas de un vector v de un espacio vectorial E con respecto a una base B de E, ésta debe estar dada en un determinado orden.

Ejercicio 3.5.5
Demuestra que las coordenadas del vector $(4, -12, 5)$ en la base B del Ejercicio 3.5.3 son $(2, -3, 1)$.

Teorema 3.5.3
Si un espacio vectorial tiene una base de n vectores, entonces:

1. Todo sistema libre de n vectores es base.
2. Todo sistema generador de n vectores es base.

Teorema 3.5.4
En un espacio vectorial todas las bases tienen el mismo número de vectores.

Como consecuencia de este teorema, obtenemos la siguiente

Definición 3.5.4 (Dimensión de un espacio vectorial)
Sea E un K-espacio vectorial, $E \neq \{\vec{0}\}$. Llamamos **dimensión** de E, y lo denotamos por $\dim(E)$, al número de vectores de una cualquiera de sus bases.

Convenimos en decir que

$$\dim(\{\vec{0}\}) = 0$$

Ejemplo 3.5.4
El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial de dimensión n, ya que como hemos visto en el Ejemplo 3.5.3, el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ tiene una base formada por n vectores.

Teorema 3.5.5
Sea S un subespacio vectorial de un K-espacio vectorial E. Entonces

$$\dim(S) \leqslant \dim(E)$$

Además,

$$\dim(S) = \dim(E) \Longleftrightarrow S = E$$

Ejercicio 3.5.6
Dados los siguientes sistemas de vectores

(*a*) $\{(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$.

(*b*) $\{(1,0,0,4),(3,2,1,0)\}$.

(*c*) $\{(1,1,1,1),(2,0,1,0)\}$.

(*d*) $\{(1,0,1,0),(0,2,1,0),(2,1,2,1)\}$.

(*e*) $\{(1,2,3),(0,1,2),(1,3,5)\}$.

(*f*) $\{(1,2,3),(0,1,2),(1,3,5),(1,2,2)\}$.

(*g*) $\{(1,1,0),(1,1,2)\}$.

halla una base y la dimensión de los subespacios generados por tales sistemas de vectores.

Como consecuencia del último teorema, en un espacio vectorial de dimensión n, todo sistema de más de n vectores es ligado.

Ejercicio 3.5.7
Sea E un K-espacio vectorial. Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ y $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ dos bases de E. Razona si las siguientes afirmaciones son correctas o si son falsas:

(*a*) $\vec{u}_1 = \vec{v}_i$, para algún $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

(b) El vector $\vec{0}$ pertenece a las dos bases.

(c) $n = m$.

(d) $\vec{u}_3$ no depende linealmente de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$.

Ejercicio 3.5.8
Sea E un K-espacio vectorial de dimensión n. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y cuáles falsas? ¿Por qué?

(a) El espacio vectorial E sólo tiene n vectores y son linealmente independientes.

(b) En el espacio vectorial E sólo hay una base formada por n vectores.

(c) Existen n vectores linealmente independientes $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in E$ tales que $E = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \rangle$.

(d) Cualquier sistema de vectores del espacio vectorial E que contenga menos de n vectores nunca es libre.

(e) Cualquier sistema de vectores del espacio vectorial E que contenga más de n vectores es siempre ligado.

Tal y como hemos indicado al final del apartado 3.3.1, los únicos subespacios vectoriales propios de $\mathbb{R}^n$ son los correspondientes a las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con n incógnitas homogéneos y compatibles indeterminados. Estas ecuaciones lineales son las llamadas **ecuaciones del subespacio vectorial**.

Veamos esta afirmación en general y después consideraremos un ejemplo.

Supongamos que S es un subespacio vectorial propio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión m; por lo tanto, $m < n$. Entonces, existen m vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m \in S$ linealmente independientes tales que

$$S = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m \rangle$$

Supongamos que

$$\vec{v}_1 = (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}) \ , \quad \vec{v}_2 = (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}) \ , \ldots ,$$
$$\vec{v}_m = (v_{m1}, v_{m2}, \ldots, v_{mn})$$

Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \ldots & v_{mn} \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \ldots & v_{mn} \end{pmatrix}$$

Evidentemente, la matriz B es una submatriz de A. Además, $\operatorname{rang}(B) = m$, ya que los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ son linealmente independientes.

Por tanto

$$\begin{aligned} \vec{x} \in S &\Longleftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} : \vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots \lambda_m \cdot \vec{v}_m \\ &\Longleftrightarrow \operatorname{rang}(A) = m \end{aligned}$$

Eligiendo un menor de orden m distinto de cero de la matriz B, que también es un menor de orden m no nulo de la matriz A, obtenemos que $\vec{x} \in S$ si, y sólo si, los $n - m$ menores orlados de la matriz A, a partir del menor de orden m no nulo, deben ser todos iguales a cero. Éstas son, pues, las $n - m$ ecuaciones del subespacio vectorial S, las cuales son independientes.

Es decir, si S es un subespacio vectorial propio de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\dim(S) = n - \text{número de ecuaciones independientes de } S$$

Es evidente que el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, considerándolo como subespacio vectorial de él mismo, no tiene ecuaciones.

Ejemplo 3.5.5

Vamos a calcular una base, la dimensión y las ecuaciones independientes del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle (2, 1, 0, -1), (-1, 2, 1, -2), (-4, 4, 1, -3) \rangle$$

En primer lugar, debemos ver si el sistema generador de S está formado por vectores linealmente independientes. Para ello, consideramos la matriz cuyas filas son las componentes de esos vectores y la escalonamos

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$S = \langle (2, 0, 1, -1), (0, 4, 3, -5) \rangle$$

Además

$$B_S = \{(2, 0, 1, -1), (0, 4, 3, -5)\}$$

es una base de S y, por tanto, $\dim(S) = 2$.

En segundo lugar

$$(x, y, z, t) \in S \Longleftrightarrow \operatorname{rang} \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} = 2$$

Como

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

se tiene que

$$(x,y,z,t) \in S \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \,, \quad \begin{vmatrix} x & y & t \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Pero

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 8z - (4x + 6y) = 8z - 4x - 6y = -2(2x + 3y - 4z)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 8t - (-4x - 10y) = 8t + 4x + 10y = 2(2x + 5y + 4t)$$

Por tanto

$$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3y - 4z = 0 \,, \;\; 2x + 5y + 4t = 0\}$$

Ejercicio 3.5.9
Calcula las ecuaciones de los subespacios generados por los sistemas de vectores del Ejercicio 3.5.6.

Teorema 3.5.6 (Dimensión de la suma y la intersección)
Sean S y T dos subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial E. Entonces

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

Ejemplo 3.5.6
Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + 3z - t = 0 \,, \\ 2x + y - z + 2t = 0 \,, \;\; 3x - y + 2z + t = 0\}$$

$$T = \langle (0,1,1,-1), (0,1,0,1), (0,3,1,1) \rangle$$

vamos a calcular una base y las ecuaciones de $S+T$ y de $S \cap T$.

En primer lugar, vamos a obtener las ecuaciones independientes de S y una base. Para ello escalonamos la matriz de coeficientes del sistema que determina el subespacio vectorial S:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & -4 \\ 0 & -5 & 7 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + 3z - t = 0 \ , \quad -5y + 7z - 4t = 0\}$$

Para obtener una base de S tenemos que resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \\ & - & 5y & + & 7z & - & 4t & = & 0 \end{array} \right.$$

La matriz de coeficientes del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

y tiene un menor de orden 2 no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Por tanto, el sistema anterior se puede transformar en el sistema de Cramer (de 2 ecuaciones, 2 incógnitas, x e y, y 2 parámetros, z y t):

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & = & t - 3z \\ & - & 5y & + & = & 4t - 7z \end{array} \right.$$

cuya solución es

$$x = \frac{\begin{vmatrix} t - 3z & -2 \\ 4t - 7z & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-5(t - 3z) + 2(4t - 7z)}{-5} = -\frac{z}{5} - \frac{3}{5}\, t$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & t - 3z \\ 0 & 4t - 7z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{4t - 7z}{-5} = \frac{7}{5}\, z - \frac{4}{5}\, t$$

Entonces

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = -1/5\, z - 3/5\, t \ , \quad y = 7/5\, z - 4/5\, t\} \\ &= \{(-1/5\, z - 3/5\, t, 7/5\, z - 4/5\, t, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-1/5, 7/5, 1, 0) + t(-3/5, -4/5, 0, 1) : z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-1/5, 7/5, 1, 0), (-3/5, -4/5, 0, 1) \rangle \\ &= \langle (-1, 7, 5, 0), (-3, -4, 0, 5) \rangle \end{aligned}$$

es decir

$$S = \langle (-1, 7, 5, 0), (-3, -4, 0, 5) \rangle$$

Como el sistema de vectores

$$B_S = \{(-1, 7, 5, 0), (-3, -4, 0, 5)\}$$

es libre, obtenemos que B_S es una base de S. De aquí, $\dim(S) = 2$.

En segundo lugar, vamos a obtener una base de T y sus ecuaciones independientes. Para ello escalonamos la matriz cuyas filas son los vectores que generan el subespacio vectorial T:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$T = \langle (0,1,1,-1), (0,0,-1,2) \rangle$$

y el sistema de vectores

$$B_T = \{(0,1,1,-1), (0,0,-1,2)\}$$

es un sistema libre, por tanto B_T es una base de T y, así, $\dim(T) = 2$.

Además

$$(x,y,z,t) \in T \Longleftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

es un menor de orden 2 no nulo, se tiene que

$$(x,y,z,t) \in S \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \, , \quad \begin{vmatrix} x & y & t \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Pero

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -x$$

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2y - t - (y + 2z) = y - 2z - t$$

Por tanto

$$T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \, , \;\; y - 2z - t = 0\}$$

En tercer lugar, debido al Ejercicio 3.4.9 obtenemos que

$$S + T = \langle (-1,7,5,0), (-3,-4,0,5), (0,1,1,-1), (0,0,-1,2) \rangle$$

Para obtener una base de $S+T$ escalonamos la matriz cuyas filas son los vectores del sistema generador de $S+T$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 15 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$S+T = \langle (-1,7,5,0), (0,5,3,-1), (0,0,1,-2) \rangle$$

y, además, el sistema de vectores

$$B_{S+T} = \{(-1,7,5,0), (0,5,3,-1), (0,0,1,-2)\}$$

es un sistema libre, por tanto B_{S+T} es un base de $S+T$ y $\dim(S+T) = 3$.
Para obtener las ecuaciones de $S+T$ procedemos igual que hemos hecho para calcular las ecuaciones de T:

$$(x,y,z,t) \in S+T \iff \operatorname{rang} \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

$$\iff \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

ya que B_{S+T} es una base.
Pero

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} &= 1 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} x & y & t \\ -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -(-7x - 5t - y) - 2(21x - 5z - (25x - 3y)) \\ &= 7x + 5t + y - 42 + 10z + 50x - 6y \\ &= 15x - 5y + 10z + 5t = 5(3x - y + 2z + t) \end{aligned}$$

Entonces

$$S+T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 3x - y + 2z + t = 0\}$$

Por último

$$S \cap T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + 3z - t = 0\ ,$$
$$- 5y + 7z - 4t = 0\ ,\ \ x = 0\ ,\ \ y - 2z - t = 0\}$$

Para calcular las ecuaciones independientes de $S \cap T$ procedemos igual que hemos hecho con las ecuaciones de T; escalonamos la matriz de coeficientes del sistema que determina $S \cap T$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$S \cap T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 0\ ,\ \ y - 2z - t = 0\ ,\ \ z + 3t = 0\}$$

Para obtener una base de $S \cap T$ resolvemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & 0 \\ & & y & - & 2z - t & = & 0 \\ & & & & z + 3t & = & 0 \end{array} \right.$$

Para resolverlo despejamos y en la segunda ecuación del sistema:

$$y = 2z + t$$

y despejamos z en la tercera ecuación del sistema:

$$z = -3t$$

Sustituyendo $z = -3t$ en la ecuación $y = 2z + t$, obtenemos:

$$y = -2t$$

Utilizando ahora la primera ecuación del sistema, $x = 0$, se tiene que las infinitas soluciones del mismo son: $(0, -2t, -3t)$, con $t \in \mathbb{R}$.
Por tanto

$$\begin{aligned} S \cap T &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 0\ ,\ \ y = -5t\ ,\ \ z = -3t\} \\ &= \{(0, -5t, -3t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \{t(0, -5, -3, 1) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (0, -5, -3, 1) \rangle \end{aligned}$$

es decir
$$S \cap T = \langle (0, -5, -3, 1) \rangle$$
De aquí
$$B_{S\cap T} = \{(0, -5, -3, 1)\}$$
es una base de $S \cap T$ y, así, $\dim(S \cap T) = 1$.
Evidentemente se cumple la tesis del Teorema 3.5.6.

Ejercicio 3.5.10
Se consideran los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle (0, 1, 1, -1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -2) \rangle$$
$$T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + 3z - t = 0\ ,\ \ 2x + y - z + 2t = 0\}$$

Calcula:

(a) Una base y las ecuaciones de $S + T$.

(b) Una base y las ecuaciones de $S \cap T$.

Para terminar este apartado, vamos a caracterizar los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$

- Subespacios impropios
  - $\{(0, 0)\}$, de dimensión 0.
  - $\mathbb{R}^2$, de dimensión 2.
- Subespacios propios
  - Los únicos subespacios propios de $\mathbb{R}^2$ son los de dimensión 1, que son las rectas que pasan por el origen.

    Para demostrar esta afirmación consideramos un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 1. Éste deberá estar generado por un vector no nulo:
    $$S = \langle (u, v) \rangle$$
    con $(u, v) \neq (0, 0)$.
    Entonces
    $$(x, y) \in S \iff \text{rang} \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = 1 \iff v\,x - u\,y = 0$$
    Es decir
    $$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : v\,x - u\,y = 0\}$$
    es una recta que pasa por el origen.

Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$

- Subespacios impropios
  - $\{(0,0,0)\}$, de dimensión 0.
  - $\mathbb{R}^3$, de dimensión 3.
- Subespacios propios
  - $\mathbb{R}^3$ tiene subespacios propios de dimensión 1 (rectas que pasan por el origen) y de dimensión 2 (planos que pasan por el origen).

    Para demostrar esta afirmación, en primer lugar, consideramos un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1. Éste deberá estar generado por un vector no nulo:
$$S = \langle (u, v, w) \rangle$$
    con $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$. Supongamos que, por ejemplo, $u \neq 0$.
    Entonces
$$(x, y, z) \in S \Longleftrightarrow \operatorname{rang} \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = 1$$
$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix} = 0 \, , \quad \begin{vmatrix} x & z \\ u & w \end{vmatrix} = 0$$
$$\Longleftrightarrow v\,x - u\,y = 0 \, , \quad w\,x - u\,z = 0$$
    es decir
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : v\,x - u\,y = 0 \, , \quad w\,x - u\,z = 0\}$$
    es una recta (intersección de dos planos) que pasa por el origen.
    En segundo lugar, consideramos un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2. Éste deberá estar generado por dos vectores linealmente independientes:
$$S = \langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle$$
    tal que
$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$$
    Entonces
$$(x, y, z) \in S \Longleftrightarrow \operatorname{rang} \begin{pmatrix} x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$
    Pero
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = A\,x + B\,y + C\,z$$

siendo

$$A = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \ , \quad B = - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \ , \quad C = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Entonces

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : A\,x + B\,y + C\,z = 0\}$$

es un plano que pasa por el origen.

3.5.2. Cambios de base

Sean E un K-espacio vectorial, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de E y $\vec{v} \in E$. Entonces

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n$$

donde $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ son las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base B.

Sea ahora $B' = \{\vec{v}\,'_1, \vec{v}\,'_2, \dots, \vec{v}\,'_n\}$ otra base de E. Entonces, los vectores de la base B tendrán unas coordenadas en la base B':

$$\vec{v}_i = a_{1i} \cdot \vec{v}\,'_1 + a_{2i} \cdot \vec{v}\,'_2 + \cdots + a_{ni} \cdot \vec{v}\,'_n \ , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

es decir, $(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$ son las coordenadas de $\vec{v}_i$ en la base B'.

Si $(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n)$ son las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base B', entonces

$$\vec{v} = \lambda'_1 \cdot \vec{v}\,'_1 + \lambda'_2 \cdot \vec{v}\,'_2 + \cdots + \lambda'_n \cdot \vec{v}\,'_n$$

Por tanto, como

$$\lambda'_1 \cdot \vec{v}\,'_1 + \lambda'_2 \cdot \vec{v}\,'_2 + \cdots + \lambda'_n \cdot \vec{v}\,'_n = \vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} &\lambda'_1 \cdot \vec{v}\,'_1 + \lambda'_2 \cdot \vec{v}\,'_2 + \cdots + \lambda'_n \cdot \vec{v}\,'_n = \\ &\quad \lambda_1 \cdot (a_{11} \cdot \vec{v}\,'_1 + a_{21} \cdot \vec{v}\,'_2 + \cdots + a_{n1} \cdot \vec{v}\,'_n) + \\ &\quad \lambda_2 \cdot (a_{12} \cdot \vec{v}\,'_1 + a_{22} \cdot \vec{v}\,'_2 + \cdots + a_{n2} \cdot \vec{v}\,'_n) + \cdots + \\ &\quad \lambda_n \cdot (a_{1n} \cdot \vec{v}\,'_1 + a_{2n} \cdot \vec{v}\,'_2 + \cdots + a_{nn} \cdot \vec{v}\,'_n) \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} &\big(\lambda'_1 - (\lambda_1 \cdot a_{11} + \lambda_2 \cdot a_{12} + \cdots + \lambda_n \cdot a_{1n})\big) \cdot \vec{v}\,'_1 + \\ &\quad \big(\lambda'_2 - (\lambda_1 \cdot a_{21} + \lambda_2 \cdot a_{22} + \cdots + \lambda_n \cdot a_{2n})\big) \cdot \vec{v}\,'_2 + \cdots + \\ &\quad \big(\lambda'_n - (\lambda_1 \cdot a_{n1} + \lambda_2 \cdot a_{n2} + \cdots + \lambda_n \cdot a_{nn})\big) \cdot \vec{v}\,'_n = \vec{0} \end{aligned}$$

De aquí, como B' es un sistema libre (sus vectores son linealmente independientes) por ser B' una base de E, se tiene

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= \lambda_1 \cdot a_{11} + \lambda_2 \cdot a_{12} + \cdots + \lambda_n \cdot a_{1n} \\ \lambda'_2 &= \lambda_1 \cdot a_{21} + \lambda_2 \cdot a_{22} + \cdots + \lambda_n \cdot a_{2n} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda'_n &= \lambda_1 \cdot a_{n1} + \lambda_2 \cdot a_{n2} + \cdots + \lambda_n \cdot a_{nn} \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

La matriz

$$\mathcal{M}_{B'B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama **matriz cambio de base** de la base B a la base B'.

Si llamamos

$$X_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} , \quad X_{B'} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$X_{B'} = \mathcal{M}_{B'B} \cdot X_B$$

Las ecuaciones anteriores referidas se llaman **ecuaciones de cambio de base** de la base B a la base B'.

Análogamente se pueden obtener las ecuaciones de cambio de base de la base B' a la base B:

$$X_B = \mathcal{M}_{BB'} \cdot X'_B$$

donde $\mathcal{M}_{BB'}$ es la matriz cambio de base de la base B' a la base B. Entonces

$$X_{B'} = \mathcal{M}_{B'B} \cdot X_B = \mathcal{M}_{B'B} \cdot \mathcal{M}_{BB'} \cdot X'_B$$

Como el vector $\vec{v}$ es arbitrario, es fácil comprobar que

$$\mathcal{M}_{B'B} \cdot \mathcal{M}_{BB'} = I$$

Igualmente, también se puede comprobar que

$$\mathcal{M}_{BB'} \cdot \mathcal{M}_{B'B} = I$$

Por tanto, la matriz $\mathcal{M}_{B'B}$ es una matriz regular y

$$(\mathcal{M}_{B'B})^{-1} = \mathcal{M}_{BB'}$$

Ejercicio 3.5.11

Demuestra que:

(*a*) $\mathcal{M}_{B'B} \cdot \mathcal{M}_{BB'} = I$.

(*b*) $\mathcal{M}_{BB'} \cdot \mathcal{M}_{B'B} = I$.

Ejemplo 3.5.7
Sabiendo que las coordenadas del vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ en la base

$$B = \{(1, 0, -1), (2, 1, 3), (3, 1, -2)\}$$

son $(2, 1, -4)$, vamos a calcular las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base

$$B' = \{(7, 2, -1), (-4, -1, 7), (3, 1, 2)\}$$

utilizando la matriz cambio de base.

Para calcular la matriz cambio de base de la base B a la base B', tenemos que obtener las coordenadas de los vectores de la base B respecto a la base B':

$$\begin{aligned}(1, 0, -1) &= a_{11} \cdot (7, 2, -1) + a_{21} \cdot (-4, -1, 7) + a_{31} \cdot (3, 1, 2)\\ (2, 1, 3) &= a_{12} \cdot (7, 2, -1) + a_{22} \cdot (-4, -1, 7) + a_{32} \cdot (3, 1, 2)\\ (3, 1, -2) &= a_{13} \cdot (7, 2, -1) + a_{23} \cdot (-4, -1, 7) + a_{33} \cdot (3, 1, 2)\end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones lineales cuyos coeficientes y los términos independientes son vectores, da lugar a tres sistemas de ecuaciones lineales, de forma que el determinante de la matriz de coeficientes (de los tres sistemas) es:

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -14 + 4 + 42 - (3 + 49 - 16) = -4 \neq 0$$

Por tanto, estos sistemas son de Cramer.
De la primera ecuación vectorial obtenemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 7a_{11} & - & 4a_{21} & + & 3a_{31} & = & 1 \\ 2a_{11} & - & a_{21} & + & a_{31} & = & 0 \\ -a_{11} & + & 7a_{21} & + & 2a_{31} & = & -1 \end{array}\right.$$

cuya solución es

$$a_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-2 + 4 - (3 + 7)}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$a_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-1 - 6 - (-7 + 4)}{-4} = \frac{-4}{-4} = 2$$

$$a_{31} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{7 + 14 - (1 + 8)}{-4} = \frac{12}{-4} = -3$$

De la segunda ecuación vectorial obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 7a_{12} - 4a_{22} + 3a_{32} = 2 \\ 2a_{12} - a_{22} + a_{32} = 1 \\ -a_{12} + 7a_{22} + 2a_{32} = 3 \end{cases}$$

cuya solución es

$$a_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-4 - 12 + 21 - (-9 + 14 - 8)}{-4} = \frac{8}{-4} = -2$$

$$a_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{14 - 2 + 18 - (-3 + 21 + 8)}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$a_{32} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-21 + 4 + 28 - (2 + 49 - 24)}{-4} = \frac{-16}{-4} = 4$$

De la tercera ecuación vectorial obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 7a_{13} - 4a_{23} + 3a_{33} = 3 \\ 2a_{13} - a_{23} + a_{33} = 1 \\ -a_{13} + 7a_{23} + 2a_{33} = -2 \end{cases}$$

cuya solución es

$$a_{13} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 7 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-6 + 8 + 21 - (6 + 21 - 8)}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$a_{23} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{14 - 3 - 12 - (-3 - 14 + 12)}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$a_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{14 + 4 + 42 - (3 + 49 + 16)}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

Entonces, la matriz cambio de base de la base B a la base B' es

$$\mathcal{M}_{B'B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

De aquí, las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base B' son

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

es decir, $(6, 5, -10)$.
El vector $\vec{v}$ es

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 2 \cdot (1, 0, -1) + 1 \cdot (2, 1, 3) + (-4) \cdot (3, 1, -2) \\ &= 6 \cdot (7, 2, -1) + 5 \cdot (-4, -1, 7) + (-10) \cdot (3, 1, 2) \\ &= (-8, -3, 9) \end{aligned}$$

Ejercicio 3.5.12
Se consideran las siguientes bases B y B' de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\}\,, \quad B' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

Sea $\vec{v}$ un vector de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas en la base B son $(1, 2, 3)$. Calcula las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base B' aplicando la matriz cambio de base.

Tema 4

Diagonalización de matrices

4.1. Introducción

El objetivo de este tema es, dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ver si existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

sea una matriz diagonal.

Todas las definiciones y propiedades enunciadas en este tema se pueden generalizar sustituyendo el cuerpo de los números reales por un cuerpo arbitrario K, a excepción del apartado dedicado a la diagonalización de matrices reales simétricas.

4.2. Valores y vectores propios

En este primer apartado vamos a introducir los conceptos de valor propio y vector propio de una matriz cuadrada. Como veremos en un ejemplo, no todas las matrices tienen valores propios; con la definición de la ecuación característica en la siguiente sección, veremos que las raíces de esta ecuación son los valores propios de la matriz, por lo que, por ejemplo, demostrar que una matriz no tiene valores propios será mucho más sencillo.

Definición 4.2.1 (Valor propio)
Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **valor propio** o **autovalor** de A si existe, al menos, un vector no nulo $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.2.1
Veamos que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

no tiene valores propios reales.

Supongamos que $\lambda \in \mathbb{R}$ sea un valor propio de la matriz A. Entonces, existe un vector no nulo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

De aquí, el vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tiene que ser solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \lambda\, x \\ -x & = & \lambda\, y \end{array} \right.$$

Como $(x, y) \neq (0, 0)$, se tiene que $x \neq 0$ ó $y \neq 0$. Supongamos que $x \neq 0$. Sustituyendo la primera ecuación en la segunda, obtenemos

$$-x = \lambda^2\, x$$

Por tanto

$$x(1 + \lambda^2) = 0 \Longleftrightarrow 1 + \lambda^2 = 0$$

La ecuación $1 + \lambda^2 = 0$ no tiene raíces reales, por lo tanto la matriz A no tiene valores propios reales.

Definición 4.2.2 (Vector propio)
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y λ un valor propio de A.
Decimos que un vector no nulo $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es un **vector propio** o **autovector** de A correspondiente al valor propio λ si

$$A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Definición 4.2.3 (Espectro)
Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, llamamos **espectro** de A, y lo representamos por $\sigma(A)$, al conjunto de todos los valores propios de A; es decir:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \text{ es un valor propio de } A\}$$

Ejemplo 4.2.2
El espectro de la matriz A del Ejemplo 4.2.1 es el conjunto vacío, es decir

$$\sigma(A) = \emptyset$$

Teorema 4.2.1 (Subespacio propio)
Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \sigma(A)$. El conjunto de los vectores propios de A correspondientes al valor propio λ constituyen, junto con el vector nulo, un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, llamado **subespacio propio** de A correspondiente al valor propio λ.
El subespacio propio de A correspondiente al valor propio λ se denota por E_λ, es decir

$$E_\lambda = \left\{(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n : A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right\}$$

La demostración de este teorema es inmediata ya que

$$E_\lambda = \left\{(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

y, por tanto, E_λ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ cuya dimensión es:

$$\dim(E_\lambda) = n - \operatorname{rang}(A - \lambda I)$$

Teorema 4.2.2
Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces:

1. Dos valores propios distintos de A no tienen ningún vector propio común, es decir

$$\lambda, \mu \in \sigma(A)\,,\ \ \lambda \neq \mu \quad \Longrightarrow \quad E_\lambda \cap E_\mu = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$$

2. Si λ_1, λ_2, …, λ_r son un conjunto de r valores propios distintos de la matriz A y $\vec{v}_i \in E_{\lambda_i} - \{(0, 0, \ldots, 0)\}$, entonces $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ es un sistema libre.

Ejercicio 4.2.1
Demuestra el primer apartado del Teorema 4.2.2.

4.3. Ecuación característica

En esta sección introducimos, entre otros, los conceptos de ecuación característica y orden de un valor propio, estableciendo una relación importante entre la dimensión de un subespacio propio asociado a un valor propio y el orden del valor propio.

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A si existe un vector no nulo $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

es decir

$$(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, para que un vector no nulo $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ sea solución del sistema anterior, ese sistema debe ser compatible indeterminado (es un sistema homogéneo).

Entonces, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, obtenemos

$$\lambda \text{ es un valor propio de } A \iff |A - \lambda I| = 0$$

Esto da lugar a la siguiente

Definición 4.3.1 (Ecuación característica)
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La ecuación $|A - \lambda I| = 0$ cuyas raíces son los valores propios de A, se llama **ecuación característica** de la matriz A.

Ejemplo 4.3.1
Veamos que aplicando la definición anterior es mucho más sencillo demostrar que la matriz del Ejemplo 4.2.1 no tiene valores propios reales.

Calculamos la matriz $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Por tanto, la ecuación característica de la matriz A es

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

es decir

$$1 + \lambda^2 = 0$$

ecuación que no tiene raíces reales, por tanto la matriz A no tiene valores propios reales.

Ejemplo 4.3.2
Vamos a calcular los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica de la matriz A es

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

es decir

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)(4-\lambda) + 6 + 6 - \big(2(1+\lambda) - 6(1-\lambda) + 3(4-\lambda)\big) = 0\,;$$

$$(-1+\lambda^2)(4-\lambda) + 12 - 2 - 2\lambda + 6 - 6\lambda - 12 + 3\lambda = 0\,;$$

$$-4 + 4\lambda^2 + \lambda - \lambda^3 + 4 - 5\lambda = 0\,;$$

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = 0\,;$$

Resolvemos ahora la ecuación característica de la matriz A:

$$-\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0\,;\ \lambda = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2 \end{cases}$$

Por tanto

$$\sigma(A) = \{0, 2\}$$

Hay que señalar aquí que la raíz $\lambda = 2$ de la ecuación característica de la matriz A es una raíz doble.

Ejercicio 4.3.1
Calcula los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definición 4.3.2 (Polinomio característico)
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. El polinomio $p(\lambda) = |A - \lambda I|$ se llama **polinomio característico** de la matriz A.

Ejemplo 4.3.3
El polinomio característico de la matriz del Ejemplo 4.3.2 es

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda$$

Ejercicio 4.3.2
Calcula el polinomio característico de la matriz del Ejercicio 4.3.1.

Definición 4.3.3 (Orden de un valor propio)
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si λ es una raíz de la ecuación característica de A, con orden de multiplicidad α, se dice que λ es un valor propio de **orden** α de la matriz A.

Ejemplo 4.3.4
Los valores propios de la matriz del Ejemplo 4.3.2 son $\lambda_1 = 0$ de orden $\alpha_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ de orden $\alpha_2 = 2$.

Ejercicio 4.3.3
Calcula el orden de los valores propios de la matriz del Ejercicio 4.3.1.

Teorema 4.3.1 (Relación entre dimensión y orden)
Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y λ un valor propio de A de orden α. Entonces

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant \alpha$$

Ejemplo 4.3.5
Vamos a calcular los subespacios propios asociados a los valores propios de la matriz del Ejemplo 4.3.2.

En primer lugar, calculamos el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 0$:

$$E_{\lambda_1} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (A - \lambda_1 I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Escalonando la matriz de coeficientes del sistema que define el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtenemos

$$E_{\lambda_1} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y + 2z = 0 \ , \ \ y + z = 0\}$$

Resolvemos ahora el sistema de ecuaciones lineal:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

Para resolverlo despejamos x en la primera ecuación del sistema:

$$x = -3y - 2z$$

y despejamos y en la segunda ecuación del sistema:

$$y = -z$$

Sustituyendo $y = -z$ en la ecuación $x = -3y - 2z$, obtenemos:

$$x = z$$

Por tanto, las infinitas soluciones del sistema son: $(z, -z, z)$, con $z \in \mathbb{R}$. De aquí:

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \ , \ \ y = -z\} = \{(z,-z,z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(1,-1,1) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1,1) \rangle \end{aligned}$$

Entonces

$$B_{\lambda_1} = \{(1,-1,1)\}$$

es una base del subespacio propio E_{λ_1}, por tanto

$$d_1 = \dim(E_{\lambda_1}) = 1 = \alpha_1$$

En segundo lugar, calculamos el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 2$:

$$E_{\lambda_2} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A - \lambda_2 I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Escalonando la matriz de coeficientes del sistema que define el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtenemos

$$E_{\lambda_2} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 3y + 2z = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y + 2z\} \\ &= \{(3y + 2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(3,1,0) + z(2,0,1) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (3,1,0), (2,0,1) \rangle \end{aligned}$$

Entonces, como el sistema de vectores

$$B_{\lambda_2} = \{(3,1,0), (2,0,1)\}$$

es libre, obtenemos que B_{λ_2} es una base del subespacio propio E_{λ_2} y, así

$$d_2 = \dim(E_{\lambda_2}) = 2 = \alpha_2$$

Ejercicio 4.3.4
Calcula los subespacios propios de la matriz del Ejercicio 4.3.1.

4.4. Matrices diagonalizables

En el Tema 1 introdujimos las matrices diagonales. Tales matrices tienen, entre otras, una propiedad importante: si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz diagonal

$$D = \text{diag}\,[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$$

entonces

$$\sigma(D) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

es decir, la matriz D tiene exactamente n valores propios, aunque puede que no sean todos distintos.

Por otra parte, si $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$D^k = \overbrace{D \cdot D \cdot \; \cdots \; \cdot D}^{k \text{ veces}}$$

es también una matriz diagonal y

$$D^k = \text{diag}\left[(\lambda_1)^k, (\lambda_2)^k, \ldots, (\lambda_n)^k\right]$$

En esta sección vamos a introducir un tipo de matrices, las matrices diagonalizables, cuya potencia es también fácil de calcular. Como aplicación obtendremos el término general de la sucesión de Fibonacci.

Definición 4.4.1 (Matriz diagonalizable)
Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dice que es **diagonalizable**, si existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ es una matriz diagonal. La matriz D se llama **forma diagonal** y la matriz regular P se llama **matriz de paso**.

Evidentemente, toda matriz diagonal es diagonalizable.

Definición 4.4.2 (Matrices semejantes)
Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dice que son **semejantes** si existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Por tanto, una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

Veamos ahora que dos matrices semejantes tienen los mismos valores propios. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dos matrices semejantes. Entonces, existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Calculamos ahora el polinomio característico de la matriz B:

$$\begin{aligned} |B - \lambda I| &= |P^{-1} \cdot A \cdot P - \lambda I| = |P^{-1} \cdot A \cdot P - \lambda P^{-1} \cdot I \cdot P| \\ &= |P^{-1} \cdot (A - \lambda I) \cdot P| = |P^{-1}|\,|A - \lambda I|\,|P| = |A - \lambda I| \end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio característico de la matriz B es igual al polinomio característico de la matriz A; es decir, las matrices A y B tienen los mismos valores propios.

Tal y como hemos señalado anteriormente, una matriz diagonal de tamaño n tiene exactamente n valores propios (no necesariamente todos distintos). Entonces, para que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sea diagonalizable, al ser ésta semejante a una matriz diagonal, deberá tener n valores propios (no necesariamente todos distintos); además, su forma diagonal estará formada por los valores propios de A (cada uno tantas veces como indique su orden).

Este resultado se expresa más formalmente de la siguiente forma. Supongamos que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz diagonalizable tal que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ son sus valores propios con órdenes respectivos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Entonces

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = n$$

Pero esta condición no es suficiente; para que lo sea, además, las dimensiones de los subespacios propios tienen que ser iguales a los órdenes de los valores propios respectivos.

Teorema 4.4.1 (Caracterización de matrices diagonalizables)
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ son sus valores propios con órdenes respectivos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ y sea $d_i = \dim(E_{\lambda_i})$, para $i = 1, 2, \ldots, r$. Entonces

$$A \text{ es diagonalizable} \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = n \\ \alpha_i = d_i\,, \ \ i = 1, 2, \ldots, r \end{cases}$$

$$\iff d_1 + d_2 + \cdots + d_r = n$$

La forma diagonal de la matriz A es

$$D = \text{diag}\left[\underbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_1}_{\alpha_1},\underbrace{\lambda_2,\dots,\lambda_2}_{\alpha_2},\dots,\underbrace{\lambda_r,\dots,\lambda_r}_{\alpha_r}\right]$$

y si

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{\alpha_1} \rangle \\
E_{\lambda_2} &= \langle \vec{v}_{\alpha_1+1}, \vec{v}_{\alpha_1+2}, \dots, \vec{v}_{\alpha_1+\alpha_2} \rangle \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
E_{\lambda_r} &= \left\langle \vec{v}_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}+1}, \vec{v}_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}+2}, \dots, \vec{v}_n \right\rangle
\end{aligned}$$

entonces la matriz de paso es

$$P = \left[V_1, V_2, \dots, V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{r-1}+1}, \dots, V_n\right]$$

donde V_i es la matriz columna cuyos elementos son las componentes del vector $\vec{v}_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

Ejemplo 4.4.1
La matriz del Ejemplo 4.3.2 es diagonalizable, ya que como hemos visto en el Ejemplo 4.3.5

$$d_1 = 1 = \alpha_1\ ,\ \ d_2 = 2 = \alpha_2$$

o lo que es lo mismo

$$d_1 + d_2 = 1 + 2 = 3 = \text{ tamaño de la matriz } A$$

Además, la forma diagonal es

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y la matriz de paso es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.4.1
Demuestra que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -20 \\ 2 & 0 & -10 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable.

Ejercicio 4.4.2
Determina si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -6 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcula su forma diagonal y la matriz de paso.

Como consecuencia del teorema de caracterización de matrices diagonalizables, Teorema 4.4.1, si una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tiene n valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, es decir, sus órdenes respectivos son $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, …, $\alpha_n = 1$, como

$$1 \leqslant d_i \leqslant \alpha_i \ , \ \ i = 1, 2, \ldots n$$

se tiene que

$$d_i = 1 \ , \ \ i = 1, 2, \ldots n$$

y entonces

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = n$$

Por tanto, la matriz A es diagonalizable.

Ejercicio 4.4.3
Determina, en cada caso, si la matriz es diagonalizable y en caso afirmativo, calcula su forma diagonal, así como la matriz de paso:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(g) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (h) $A = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(i) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -5 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (j) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(k) $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -12 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ (l) $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -20 \\ 2 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

$(m)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $(n)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Una aplicación de las matrices diagonalizables es el cálculo de una potencia de una matriz (diagonalizable). Supongamos que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz diagonalizable. Entonces, existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

es una matriz diagonal. Multiplicando a la izquierda por la matriz P en ambas partes de la igualdad, obtenemos

$$P \cdot D = P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P = I \cdot A \cdot P = A \cdot P$$

Multiplicando ahora a la derecha por la matriz P^{-1} en ambas partes de la igualdad, tenemos

$$P \cdot D \cdot P^{-1} = A \cdot P \cdot P^{-1} = A \cdot I = A$$

es decir

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

De aquí

$$\begin{aligned} A^2 &= P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot I \cdot D \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot D \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

Igualmente se puede demostrar que

$$A^3 = P \cdot D^3 \cdot P^{-1}$$

y en general

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4.4.4
Calcula A^{30} en los siguientes casos:

$(a)\ A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$(b)\ A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -20 \\ 2 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

$(c)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En ocasiones debemos determinar si una familia de matrices que dependen de un parámetro son o no diagonalizables en función de dicho parámetro.

Ejemplo 4.4.2
Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$$

vamos a estudiar si es diagonalizable en función de los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

En primer lugar calculamos los valores propios de la matriz A:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

es decir

$$(5-\lambda)(-1-\lambda)(a-\lambda) = 0$$

Por tanto, los valores propios de A son $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = a$.

Esto da lugar a los tres siguientes casos:

1 $a \neq -1, 5$.

Los valores propios de la matriz A, en este caso, son

$$\begin{array}{rl} \lambda_1 = 5\,, & \alpha_1 = 1\,;\quad 1 \leqslant d_1 \leqslant \alpha_1 = 1 \implies d_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1\,, & \alpha_2 = 1\,;\quad 1 \leqslant d_2 \leqslant \alpha_2 = 1 \implies d_2 = 1 \\ \lambda_3 = a\,, & \alpha_3 = 1\,;\quad 1 \leqslant d_3 \leqslant \alpha_3 = 1 \implies d_3 = 1 \end{array}$$

De aquí

$$d_1 + d_2 + d_3 = 3 = \text{ tamaño de la matriz } A$$

y entonces, la matriz A es diagonalizable.

2 $a = -1$.

Los valores propios de la matriz A, en este caso, son

$$\begin{array}{rl} \lambda_1 = 5\,, & \alpha_1 = 1\,;\quad 1 \leqslant d_1 \leqslant \alpha_1 = 1 \implies d_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1\,, & \alpha_2 = 2\,;\quad 1 \leqslant d_1 \leqslant \alpha_2 = 2 \implies d_2 = 1 \text{ ó } d_2 = 2 \end{array}$$

Pero, de acuerdo con lo expuesto después del Teorema 4.2.1:

$$d_2 = \dim(E_{\lambda_2}) = 3 - \operatorname{rang}(A - \lambda_2 I)$$

y como

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\operatorname{rang}(A - \lambda_2 I) = 1$$

y así, $d_2 = 2$. Por tanto

$$d_1 + d_2 = 3 = \text{ tamaño de la matriz } A$$

y entonces, la matriz A es diagonalizable.

$\boxed{3}$ $a = 5$.

Los valores propios de la matriz A, en este caso, son

$$\begin{array}{rl} \lambda_1 = 5\ ,\ \ \alpha_1 = 2\ ;\ \ 1 \leqslant d_1 \leqslant \alpha_1 = 2 & \Longrightarrow \ \ d_1 = 1 \text{ ó } d_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1\ ,\ \ \alpha_2 = 1\ ;\ \ 1 \leqslant d_1 \leqslant \alpha_2 = 1 & \Longrightarrow \ \ d_2 = 1 \end{array}$$

Pero, de acuerdo con lo expuesto después del Teorema 4.2.1:

$$d_1 = \dim(E_{\lambda_1}) = 3 - \operatorname{rang}(A - \lambda_1 I)$$

y como

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\operatorname{rang}(A - \lambda_2 I) = 2$$

y así, $d_1 = 1$. Por tanto

$$d_1 + d_2 = 2 < 3 = \text{ tamaño de la matriz } A$$

y entonces, la matriz A no es diagonalizable.

Ejercicio 4.4.5

Estudia, en función del parámetro a, si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

La Sucesión de Fibonacci

La sucesión numérica

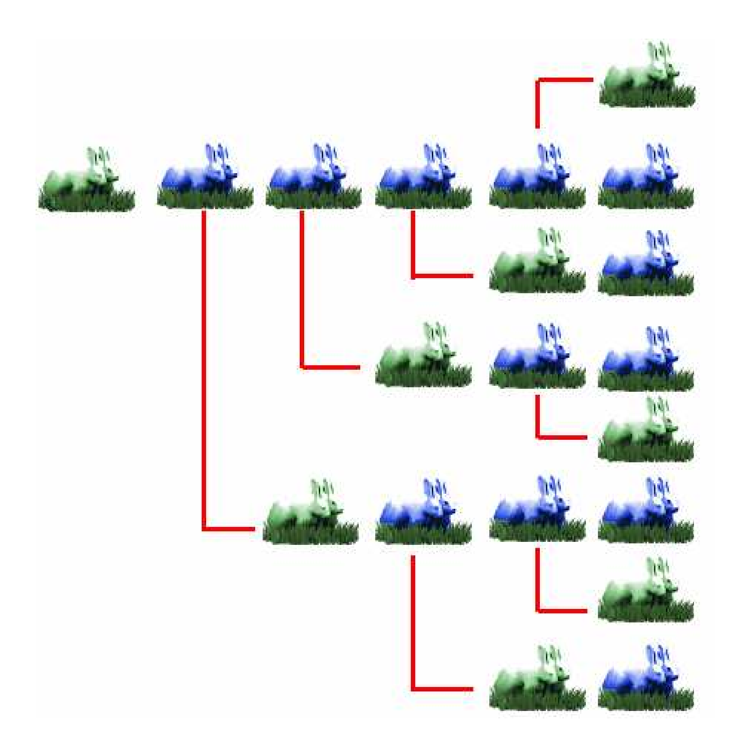
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

se llama sucesión de Fibonacci. Los dos primeros términos son 1 y 1, y el siguiente se obtiene al sumar los dos anteriores. Así, en general, si $u_0 = 1$ y $u_1 = 1$, entonces para $n \geqslant 2$:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

La sucesión de Fibonacci fue introducida por el matemático italiano Leonardo Pisano (1175-1226), conocido como Fibonacci, que a su vez es contracción de filius Bonaci (literalmente “hijo de Bonacci”). En su “libro del ábaco” plantea el siguiente problema:

Sea una pareja de conejos jóvenes. Los conejos tardan un mes en madurar y a partir del mes siguiente, cada pareja madura de conejos da a luz a una pareja de conejos jóvenes. ¿Cuál es el número de parejas de conejos que habrá transcurridos n meses?



La siguiente tabla muestra el número de parejas de conejos que hay en cada uno de los seis primeros meses, tal y como se desprende de la figura anterior:

Mes	Primero	Segundo	Trecero	Cuarto	Quinto	Sexto
Parejas de conejos	1	1	2	3	5	8

La sucesión de Fibonacci se puede escribir en forma matricial, como:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 2$$

con $u_0 = 1$ y $u_1 = 1$.

El problema consiste, pues, en obtener el término general de la sucesión de Fibonacci, u_n, ya que u_n corresponde con el número de parejas de conejos que hay en el n-ésimo mes.

Haciendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$\mathbf{w}_{n-2} = \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}, \ \mathbf{w}_{n-1} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

obtenemos que la sucesión de Fibonacci se puede escribir en la forma:

$$\mathbf{w}_{n-1} = A \cdot \mathbf{w}_{n-2}\,, \quad n \geqslant 2$$

y así

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= A \cdot \mathbf{w}_0 \\
\mathbf{w}_2 &= A \cdot \mathbf{w}_1 = A \cdot (A \cdot \mathbf{w}_0) = A^2 \cdot \mathbf{w}_0 \\
&\vdots \\
\mathbf{w}_{n-1} &= A \cdot \mathbf{w}_{n-2} = \cdots = A^{n-1} \cdot \mathbf{w}_0
\end{aligned}$$

El problema consiste, pues, en calcular A^{n-1}, lo cual es bastante engorroso cuando n es grande. En cambio, si la matriz A es diagonalizable el problema es más sencillo. Veamos si éste es el caso. Empezamos calculando los valores propios de A:

$$|A - \lambda I| = 0\,; \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0\,; \quad (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = 0\,; \quad \lambda^2 - \lambda - 1 = 0;$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

es decir, los valores propios (simples) de A son:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Al ser la matriz de tamaño 2 y tener dos valores propios distintos, se tiene que la matriz A es diagonalizable. La forma diagonal, es:

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora la matriz de paso. Para ello, obtenemos los subespacios propios correspondientes a los valores propios λ_1 y λ_2.

Comenzamos con E_{λ_1}:

$$E_{\lambda_1} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Pero

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

y así, la expresión matricial del sistema

$$(A-\lambda_1 I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

es

$$\begin{pmatrix}\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & 1\\ 1 & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

es decir

$$\left\{\begin{array}{rcrcl}\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x & + & y & = & 0\\ x & - & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}y & = & 0\end{array}\right.$$

Multiplicando la segunda ecuación por $(1-\sqrt{5})/2$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt{5}}{2}x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\frac{1+\sqrt{5}}{2}y=0 &\Longrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}x-\frac{1-5}{4}y=0\\ &\Longrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}x+y=0\end{aligned}$$

es decir, la primera ecuación. Por tanto, las dos ecuaciones no son independientes. Entonces

$$\begin{aligned}E_{\lambda_1}&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\,x\right\}=\left\{(x,\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\,x) : x\in\mathbb{R}\right\}\\ &=\left\{x\,(1,\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}) : x\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle(1,\tfrac{\sqrt{5}-1}{2})\right\rangle=\left\langle(2,\sqrt{5}-1)\right\rangle\end{aligned}$$

Ahora hacemos lo mismo con E_{λ_2}:

$$E_{\lambda_2}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (A-\lambda_2 I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Pero

$$A-\lambda_2 I=\begin{pmatrix}1-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & 1\\ 1 & -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 1\\ 1 & \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{pmatrix}$$

y así, la expresión matricial del sistema

$$(A-\lambda_2 I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

es

$$\begin{pmatrix}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 1\\ 1 & \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

es decir

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x & + & y & = & 0 \\ x & + & \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}y & = & 0 \end{array}\right.$$

Multiplicando la segunda ecuación por $(1+\sqrt{5})/2$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{\sqrt{5}-1}{2}y = 0 &\Longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + \frac{5-1}{4}y = 0 \\ &\Longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + y = 0 \end{aligned}$$

es decir, la primera ecuación. Por tanto, las dos ecuaciones no son independientes. Así

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}x\right\} = \left\{(x, -\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}x) : x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x\,(1, -\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}) : x \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle(1, -\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})\right\rangle = \left\langle(2, -1-\sqrt{5})\right\rangle \end{aligned}$$

Entonces

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \sqrt{5}-1 & -1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

es la matriz de paso, y de aquí

$$\begin{aligned} D &= P^{-1} \cdot A \cdot P \\ A &= P \cdot D \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

De este modo

$$A^{n-1} = P \cdot D^{n-1} \cdot P^{-1}$$

Por tanto

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{w}_{n-1} = A^{n-1} \cdot \mathbf{w}_0 = A^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P \cdot D^{n-1} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora la matriz inversa de P. Omitiendo el proceso, obtenemos:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} & \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} & \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}} - \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \\ \dfrac{\sqrt{5}-3}{4\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Pero

$$D^{n-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

y así

$$D^{n-1} \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}-3}{4\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ \frac{\sqrt{5}-3}{4\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

de donde

$$P \cdot D^{n-1} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \sqrt{5}-1 & -1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ \frac{\sqrt{5}-3}{4\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$u_n = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} + 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \frac{\sqrt{5}-3}{4\sqrt{5}}$$
$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right) \right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \right]$$

Se puede demostrar que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

e igualmente

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

Por tanto

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Así, por ejemplo, transcurridos 2 años tendremos:

$$u_{24} = 75025 \text{ pares de conejos}$$

y transcurridos 10 años:

$$u_{120} = 8670007398507948658051921 \text{ pares de conejos}$$

es decir, del orden de 10^{25} conejos.

4.5. Diagonalización de matrices reales simétricas

Tal y como hemos visto en la sección anterior, no todas las matrices son diagonalizables. En cambio, cuando se trata de una matriz real y simétrica, caso éste muy frecuente en Física e Ingeniería, la simetría de la matriz conduce a que ésta sea diagonalizable.

Una aplicación importante de este hecho lo abordaremos en la segunda parte de este material, cuando consideremos problemas de extremos libres y de extremos condicionados (multiplicadores de Lagrange). En el estudio de los extremos (máximos y mínimos) interviene la matriz hessiana, la cual es una matriz simétrica.

Teorema 4.5.1
Toda matriz real y simétrica es diagonalizable.

Ejercicio 4.5.1
Estudia, en función del parámetro real a, si las siguientes matrices son diagonalizables:

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & a & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Bibliografía

[1] BARBOLLA, R. Y SANZ, P. (1998): *Álgebra lineal y teoría de matrices.* Prentice Hall, Madrid.

[2] DE BURGOS, J. (1993): *Curso de álgebra y geometría.* Alhambra Universidad, Madrid.

[3] GROSSMAN, S.I. (1993): *Álgebra lineal.* McGraw Hill, México.

[4] KOLMAN, B. (1999): *Álgebra lineal con aplicaciones y mathlab.* Prentice Hall, México.

[5] LANG, S. (1990): *Introducción al álgebra lineal.* Addison-Weley Iberoamericana, Wilmington.

[6] MERINO, L. Y SANTOS, E. (2006): *Álgebra lineal con métodos elementales.* Thomson, Madrid.